Suites : Résumé de cours et méthodes

1 Généralités

DÉFINITION

> Une suite numérique est une liste de nombres, rangés et numérotés :
> • à l'entier 0 correspond le nombre noté U_0
> • à l'entier 1 correspond le nombre noté U_1
> ...
> • à l'entier n correspond le nombre noté U_n (appelé terme de la suite de rang n).
> La suite est notée (U_n)

Remarque :
Ne pas confondre (U_n) qui représente la **suite**, et U_n qui est le **nombre** représentant le terme de la suite de rang n.
Il y a principalement deux manières de définir une suite :

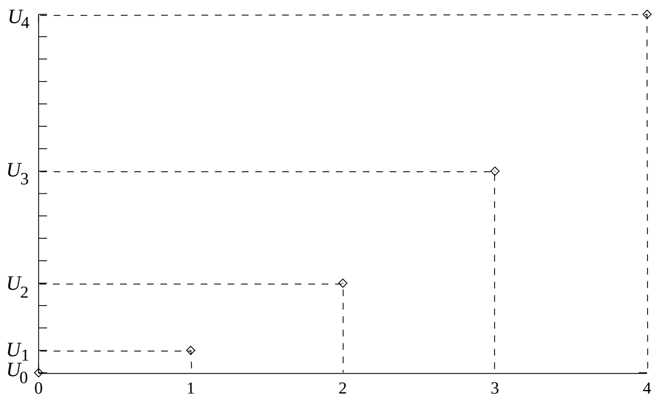
1-1 Suite définie de façon explicite

Dans ce cas, on dispose d'une formule permettant de calculer directement U_n en fonction de n.
C'est à dire qu'il existe une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ telle que, pour tout entier n, $U_n = f(n)$.
Exemples :

1) Soit (U_n), la suite définie par $U_n = 3n+4$.
Le premier terme de la suite est alors $U_0 = 3\times 0+4 = 4$ (on remplace n par 0).
$U_1 = 3\times 1+4 = 7$ (on remplace n par 1).
$U_{10} = 3\times 10+4 = 34$ (on remplace n par 10).
Pour tout n, $U_{n+1} = 3\times(n+1)+4 = 3n+3+4 = 3n+7$ (on remplace n par $n+1$).

2) Soit (U_n), la suite définie par $U_n = n^2$.
On a : $U_0 = 0^2 = 0$, $U_1 = 1^2 = 1$, $U_2 = 2^2 = 4$.
Et pour tout n, $U_{n+1} = (n+1)^2 = n^2+2n+1$.

Représentation graphique d'une suite définie de façon explicite : Dans un repère orthogonal, on place les points d'abscisse n et d'ordonnée U_n (que l'on ne joint pas entre eux !). Cela revient à ne tracer que les points d'abscisses entières de la courbe représentative de la fonction f.
Avec la suite de l'exemple 2 $\left(U_n = n^2\right)$, cela donne la représentation graphique suivante :



1-2 Suite définie par une relation de récurrence

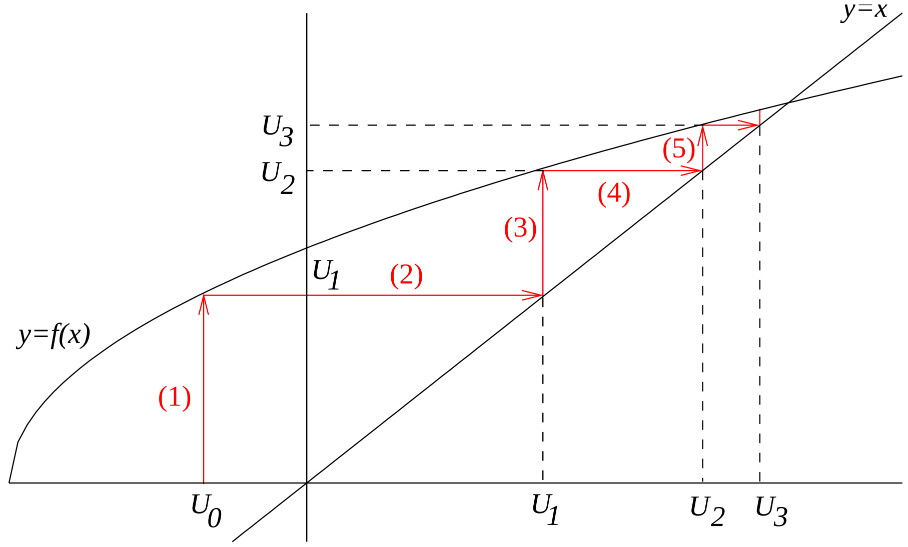
Dans ce cas là, il n'y a plus de formule permettant de calculer directement U_n en fonction de n, mais on dispose d'une relation (dite de récurrence) permettant de calculer le terme de rang $n+1$ à partir de celui de rang n. Ainsi, en connaissant le premier terme U_0, on peut calculer le terme suivant U_1. Puis avec U_1, on peut calculer le terme suivant U_2, etc...
D'un point de vue mathématique, la suite est définie par :
le terme initial U_0 et la relation de récurrence : $U_{n+1} = f(U_n)$ (où f est une fonction définie sur un intervalle I tel que : $U_0 \in I$ et pour tout x de I, $f(x) \in I$).

Exemples :

1) Soit (U_n), la suite définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 3 \times U_n$.
On a alors, $U_1 = 3 \times U_0 = 3 \times 2 = 6$ (on remplace n par 0 dans le relation de récurrence) .
$U_2 = 3 \times U_1 = 3 \times 6 = 18$ (on remplace n par 1 dans le relation de récurrence) .
$U_3 = 3 \times U_2 = 3 \times 18 = 54$ (on remplace n par 2 dans le relation de récurrence) .

2) Soit (U_n), la suite définie par $U_0 = -1,5$ et $U_{n+1} = 2\sqrt{4 + U_n}$.
On a alors, $U_1 = 2\sqrt{4 + U_0} = 2\sqrt{4 - 1,5} \approx 3,16$.
$U_2 = 2\sqrt{4 + U_1} \approx 2\sqrt{4 + 3,16} \approx 5,35$.

Détermination graphique des termes d'une suite définie par une relation de récurrence : Dans un repère orthonormé, on trace d'abord la représentation graphique de la fonction f définissant la relation de récurrence et la droite d'équation $y = x$.
On part de U_0 en abscisse : l'ordonnée du point de la courbe correspondant à cette abscisse nous donne U_1 [(1) *sur le graphique correspondant à l'exemple 2*] .
Pour déterminer $U_2 = f(U_1)$, il nous faut rabattre U_1 sur l'axe des abscisses [(2) *sur le graphique*] : pour cela on utilise la droite d'équation $y = x$.
Dès lors, U_2 est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse U_1 [(3) *sur le graphique*].
Pour poursuivre la construction, on répète le procédé en rabattant U_2 sur l'axe des abscisses [(4) *sur le graphique*].
U_3 est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse U_2 [(5) *sur le graphique*] ...



2 Sens de variation d'une suite

DÉFINITION

- Une suite (U_n) est dite **croissante** si pour tout entier n, $U_{n+1} \geqslant U_n$.
- Une suite (U_n) est dite **décroissante** si pour tout entier n, $U_{n+1} \leqslant U_n$.

Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite :

1) Calculer et étudier le signe de $U_{n+1} - U_n$ pour tout n (cette méthode est valable dans tous les cas) :
- si pour tout n, $U_{n+1} - U_n \geqslant 0$ alors la suite (U_n) est croissante.
- si pour tout n, $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$ alors la suite (U_n) est décroissante.

2) Pour les suites dont les termes sont tous **strictement positifs** (à vérifier avant), il peut être pratique de calculer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et d'utiliser la propriété suivante :
- si pour tout n, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geqslant 1$ alors la suite (U_n) est croissante.
- si pour tout n, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leqslant 1$ alors la suite (U_n) est décroissante.

3) Pour les suites définies de façon explicite par $U_n = f(n)$:
- si la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$ alors la suite (U_n) est aussi croissante.
- si la fonction f est décroissante sur $[0;+\infty[$ alors la suite (U_n) est aussi décroissante.

Exemples :

1) Soit (U_n), la suite définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = U_n - \dfrac{1}{(U_n)^2}$.

S'agissant d'une suite définie par une relation de récurrence, nous ne pouvons utiliser que la première ou deuxième méthode. Avec la première méthode :
Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = U_n - \dfrac{1}{(U_n)^2} - U_n = -\dfrac{1}{(U_n)^2} < 0$.

La suite (U_n) est donc décroissante.

2) Soit (U_n), la suite définie par $U_n = 5 \times 3^n$.
Pour tout n, $U_n > 0$. On peut donc utiliser la deuxième méthode (souvent utilisée quand il y a des puissances) :
Pour tout n, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{5 \times 3^{n+1}}{5 \times 3^n} = 3 \geqslant 1$.
La suite (U_n) est donc croissante.

3) Soit (U_n), la suite définie par $U_n = n^2$.
C'est une suite définie de façon explicite avec $U_n = f(n)$ où f est la fonction définie par $f(x) = x^2$. Or on sait que la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$.
En utilisant la troisième méthode, on conclut que la suite (U_n) est croissante.

3 Majorants et minorants d'une suite

DÉFINITION

- Une suite (U_n) est dite **majorée** à partir du rang p s'il existe un réel M tel que, pour tout entier $n \geqslant p$, $U_n \leqslant M$. (M est alors appelé majorant de la suite)
- Une suite (U_n) est dite **minorée** à partir du rang p s'il existe un réel m tel que, pour tout entier $n \geqslant p$, $U_n \geqslant m$. (m est alors appelé minorant de la suite)
- Une suite (U_n) est dite **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple :
Soit (U_n), la suite définie par $U_n = \dfrac{1}{n+1}$.
Pour tout $n \geqslant 0$, $U_n \geqslant 0$ (car U_n est la division de deux réels positifs). Donc la suite (U_n) est minorée par 0.
De plus, pour tout $n \geqslant 0$: $n+1 \geqslant 1$, donc $\dfrac{1}{n+1} \leqslant 1 \Leftrightarrow U_n \leqslant 1$.
Donc la suite (U_n) est aussi majorée par 1.
Donc, pour tout entier n, $0 \leqslant U_n \leqslant 1$. La suite est bornée.

4 Suites arithmétiques

DÉFINITION

Une suite est dite arithmétique si l'on passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre .
Autrement dit, une suite (U_n) est **arithmétique** s'il existe un réel a (appelé **raison**) tel que pour tout entier n, $U_{n+1} = U_n + a$.

$$\boxed{U_0} \xrightarrow{+a} \boxed{U_1} \xrightarrow{+a} \boxed{U_2} \text{ - - - - - - } \boxed{U_n} \xrightarrow{+a} \boxed{U_{n+1}}$$

Exemple :
4, 7, 10, 13 et 16 sont les premiers termes d'une suite arithmétique de raison 3 :

$$\boxed{4} \xrightarrow{+3} \boxed{7} \xrightarrow{+3} \boxed{10} \xrightarrow{+3} \boxed{13} \xrightarrow{+3} \boxed{16}$$

PROPRIÉTÉ

Si une suite (U_n) est telle que pour tout n, $U_{n+1} - U_n =$ constante alors (U_n) est une suite arithmétique de raison égale à la constante.

Exemple :
Soit (U_n), la suite définie par $U_n = 4n+5$.
Pour tout n, $U_{n+1} = 4(n+1)+5 = 4n+9$. Donc, $U_{n+1} - U_n = 4n+9-(4n+5) = 4$.
(U_n) est donc une suite arithmétique de raison égale à 4.

Remarques :
- De façon générale, si pour tout n, U_n peut s'écrire sous la forme $U_n = An+B$ alors (U_n) est une suite arithmétique de raison A.
- Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique se situent sur une même droite de coefficient directeur égal à la raison.

PROPRIÉTÉ

Si (U_n) est une suite arithmétique de raison a alors pour tous entiers n et p :
- $U_n = U_0 + na$
- $U_n = U_p + (n-p)a$
- $U_p + U_{p+1} + \cdots + U_{n-1} + U_n = (n-p+1) \times \dfrac{U_p+U_n}{2} = (\text{nb de termes}) \times \dfrac{\text{1er terme} + \text{dernier}}{2}$
  (si $p < n$)

Exemples :

1) Soit (U_n) la suite arithmétique de 1er terme $U_0 = 2$ et de raison $a = 3$.
$U_{10} = U_0 + 10a = 2 + 10 \times 3 = 32$; $\quad U_{33} = U_0 + 33a = 2 + 33 \times 3 = 101$
Pour tout n, $U_n = U_0 + na = 2 + 3n$.
$U_0 + U_1 + \cdots + U_{10} = 11 \times \dfrac{2+32}{2} = 187$.
(attention : le nb de termes est égal à 11 pas à 10 !)
Pour tout n, $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n = (n+1) \times \dfrac{U_0+U_n}{2} = (n+1) \times \dfrac{2+(2+3n)}{2} = \dfrac{(n+1)(4+3n)}{2}$.

2) Soit (U_n) la suite arithmétique telle que $U_2 = 7$ et $U_5 = 19$.
Pour trouver la raison a : on a $U_5 = U_2 + (5-2)a$, d'où $19 = 7 + 3a \Leftrightarrow a = 4$
A partir de là, on peut calculer U_{10} en utilisant que $U_{10} = U_2 + (10-2)a = 7 + 8 \times 4 = 39$.
On a aussi : $U_2 + U_3 + \cdots + U_{10} = 9 \times \dfrac{7+39}{2} = 207$.

3) Calcul de la somme $S = 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 119 + 121$:
On reconnait la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 2 (on passe d'un terme au terme suivant de la somme en ajoutant à chaque fois 2). Mais il nous manque le nombre de termes pour pouvoir appliquer la formule.
On utilise alors la propriété suivante : $\text{nb de termes} = \dfrac{\text{dernier terme} - \text{premier}}{\text{raison}} + 1$.
Ce qui nous donne ici un nombre de termes égal à 59 $\left(\dfrac{121-5}{2} + 1\right)$.
D'où, $S = (\text{nb de termes}) \times \dfrac{\text{1er terme} + \text{dernier}}{2} = 59 \times \dfrac{5+121}{2} = 3717$

PROPRIÉTÉ

Sens de variation d'une suite arithmétique de raison a :
- Si $a \geqslant 0$, la suite est croissante.
- Si $a \leqslant 0$, la suite est décroissante.

5 Suites géométriques

DÉFINITION

Une suite est dite géométrique si on passe d'un terme au terme suivant en le multipliant toujours par le même nombre non nul.
Autrement dit, une suite (U_n) est **géométrique** s'il existe un réel $b \neq 0$ (appelé **raison**) tel que pour tout entier n, $U_{n+1} = b \times U_n$.

$$\boxed{U_0} \xrightarrow{\times\, b} \boxed{U_1} \xrightarrow{\times\, b} \boxed{U_2} \text{ - - - - - - } \boxed{U_n} \xrightarrow{\times\, b} \boxed{U_{n+1}}$$

Exemple :

3, 6, 12, 24 et 48 sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison 2 :

$$\boxed{3} \xrightarrow{\text{x } 2} \boxed{6} \xrightarrow{\text{x } 2} \boxed{12} \xrightarrow{\text{x } 2} \boxed{24} \xrightarrow{\text{x } 2} \boxed{48}$$

PROPRIÉTÉ

> Si une suite (U_n) (n'ayant aucun terme nul) est telle que pour tout n, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ = constante alors (U_n) est une suite géométrique de raison égale à la constante.

Exemple :
Soit (U_n), la suite définie par $U_n = 3 \times 4^n$.
Pour tout n, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{3 \times 4^{n+1}}{3 \times 4^n} = 4$.
(U_n) est donc une suite géométrique de raison égale à 4.

Remarque :
De façon générale, si pour tout n, U_n peut s'écrire sous la forme $U_n = A \times B^n$ alors (U_n) est une suite géométrique de raison B.

PROPRIÉTÉ

> Si (U_n) est une suite géométrique de raison b alors pour tous entiers n et p :
> - $U_n = b^n \times U_0$
> - $U_n = b^{(n-p)} \times U_p$
> - $U_p + U_{p+1} + \cdots + U_{n-1} + U_n = U_p \times \dfrac{1 - b^{(n-p+1)}}{1-b} = 1\text{er terme} \times \dfrac{1 - b^{(\text{nb de termes})}}{1-b}$
>   (si $p < n$ et si $b \neq 1$)

Exemples :

1) Soit (U_n) la suite géométrique de 1er terme $U_0 = 5$ et de raison $b = 2$.
$U_4 = b^4 \times U_0 = 2^4 \times 5 = 80$; $U_{10} = b^{10} \times U_0 = 2^{10} \times 5 = 5120$
Pour tout n, $U_n = b^n \times U_0 = 5 \times 2^n$.
$U_0 + U_1 + \cdots + U_8 = 5 \times \dfrac{1-2^9}{1-2} = 2555$. *(attention : le nb de termes est égal à 9 pas à 8 !)*
Pour tout n, $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n = U_0 \times \dfrac{1-b^{(n+1)}}{1-b} = 5 \times \dfrac{1-2^{(n+1)}}{1-2} = 5 \times \left(2^{(n+1)} - 1\right)$.

2) Soit (U_n) la suite géométrique de raison positive telle que $U_2 = 7$ et $U_4 = 63$.
Pour trouver la raison b : on a $U_4 = b^{4-2} \times U_2$, d'où $63 = 7 \times b^2 \Leftrightarrow b^2 = 9$.
Donc, $b = 3$ (car $b > 0$)
A partir de là, on peut calculer U_6 en utilisant que $U_6 = b^{6-2} \times U_2 = 3^4 \times 7 = 567$.
On a aussi : $U_2 + U_3 + \cdots + U_6 = 7 \times \dfrac{1-3^5}{1-3} = 847$.

3) Calcul de la somme $S = 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 128 + 256$:
On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de raison 2 (on passe d'un terme au terme suivant de la somme en le multipliant à chaque fois par 2).
Généralement, on utilise la méthode qui consiste à écrire sur une ligne la somme en question et en dessous le produit de cette somme avec la raison de la suite géométrique. En faisant la différence de ces deux lignes, on obtient rapidement le résultat grâce aux éliminations qui en découlent :

$$\begin{array}{rl} & S = 4 + \cancel{8} + \cancel{16} + \cancel{32} + \ldots + \cancel{128} + \cancel{256} \\ - & 2S = \cancel{8} + \cancel{16} + \cancel{32} + \cancel{64} + \ldots + \cancel{256} + 512 \\ \hline & -S = 4 - 512 \end{array}$$

Finalement, on a $S = 508$.

PROPRIÉTÉ

Sens de variation d'une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison b :

- Si $b < 0$ alors la suite n'est ni croissante, ni décroissante.
- Si $b = 1$ alors la suite est constante.
- Si $0 < b < 1$, la suite est décroissante lorsque $U_0 > 0$ et croissante lorsque $U_0 < 0$.
- Si $b > 1$, la suite est croissante lorsque $U_0 > 0$ et décroissante lorsque $U_0 < 0$.

6 Suites arithmético-géométriques

Généralités :

Ce sont des suites définies par une relation de récurrence de la forme : $U_{n+1} = aU_n + b$ (avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$) .
Pour les étudier on utilise une autre suite (V_n) définie par $V_n = U_n - \alpha$ où α est en fait le réel tel que $\alpha = a \times \alpha + b$ (α est en fait généralement donné dans l'énoncé de l'exercice). On montre ensuite que cette suite (V_n) est géométrique (de raison a en fait, mais le résultat n'est pas à connaître). On peut alors en déduire la forme explicite de la suite (U_n).

Exemple :

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n + 4$.
- Montrons que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 8$ est géométrique :
(on remarquera que $\alpha = \dfrac{1}{2}\alpha + 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 8$)
Pour tout n : $V_{n+1} = U_{n+1} - 8 = \dfrac{1}{2}U_n + 4 - 8 = \dfrac{1}{2}U_n - 4$. Or, $V_n = U_n - 8$.
Donc, pour tout n, on a $V_{n+1} = \dfrac{1}{2}V_n$. Ce qui prouve que la suite (V_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
- On peut maintenant en déduire la forme explicite de V_n, puis de U_n :
Pour tout n, $V_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times V_0$. Or, $V_0 = U_0 - 8 = 2 - 8 = -6$. Donc, $V_n = -6 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
Comme $U_n = V_n + 8$, on en déduit que $U_n = -6 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 8$