Variations d'une fonction : Résumé de cours et méthodes

1 Méthode générale d'étude des variations d'une fonction :

Pour étudier les variations d'une fonction f sur un intervalle I :
- Dériver la fonction f.
- Factoriser si possible la dérivée f' afin de l'exprimer sous la forme d'un produit ou d'un quotient d'expressions du premier ou du second degré.
- Etudier le signe de chaque terme de $f'(x)$ sur l'intervalle I. En déduire le signe de $f'(x)$ à l'aide d'un tableau de signes.
- Dresser le tableau de variations de f sur I en utilisant la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ

f étant dérivable sur I, pour tout intervalle J inclus dans I :
- Si $f'(x) > 0$, pour tout x de J, alors f est strictement croissante sur J.
  (symbolisé par une flèche $\nearrow$ dans le tableau de variations)
- Si $f'(x) < 0$, pour tout x de J, alors f est strictement décroissante sur J.
  (symbolisé par une flèche $\searrow$ dans le tableau de variations)
- Si $f'(x) = 0$, pour tout x de J, alors f est constante sur J.
  (symbolisé par une flèche $\longrightarrow$ dans le tableau de variations)

Remarque : On utilise généralement un seul tableau pour l'étude du signe de la dérivée et les variations de f. (voir exemples)

2 Rappels sur les études de signe :

Pour étudier le signe de $f'(x)$, on factorise si possible $f'(x)$ sous la forme d'un produit ou d'un quotient d'expressions du premier ou du second degré dont on sait étudier le signe grâçe aux règles suivantes :
- **Signe de** $ax+b \quad (a \neq 0)$
  On détermine la valeur de x qui annule $ax+b$, puis on applique la règle : "signe de a après le 0".

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$ax+b$		signe de $(-a)$	0	signe de a	

- **Signe de** $ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$: on calcule la discriminant $\Delta = b^2-4ac$ (sauf cas évidents)
  - Si $\Delta < 0$, on applique la règle : "toujours du signe de a".

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	

  - Si $\Delta = 0$, on calcule la racine double : $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$.
  On applique alors la règle : "toujours du signe de a et s'annule pour $x = x_1$".

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

  - Si $\Delta > 0$, on calcule les deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  On applique alors la règle : "signe de a à l'extérieur des racines".

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

(on suppose que $x_1 < x_2$)

3 Exemples d'étude des variations d'une fonction :

- **Exemple 1 :**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 1$.
- Dérivée : $f'(x) = 2x - 6$
- Etude du signe de la dérivée : $2x - 6$ est du premier degré et s'annule pour $x = 3$.
On applique la règle "signe de $a = 2$ après le 0" (donc $+$ après le 0).
- Tableau de variations :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-8	↗	

Le tableau a été complété par le calcul de $f(3)$: $f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 1 = -8$.

- **Exemple 2 :**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$.
- Dérivée : $f'(x) = -3x^2 - 2x + 1$
- Etude du signe de la dérivée : $-3x^2 - 2x + 1$ est du second degré.
Calcul du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(-3)(1) = 16 > 0$.
On applique donc la règle "signe de $a = -3$ (donc $-$) à l'extérieur des racines".
Calcul des racines :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-2) - 4}{-6} = \dfrac{1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-2) + 4}{-6} = -1$
- Tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	0	↗	$\frac{32}{27}$	↘	

Le tableau a été complété par le calcul de $f(-1)$ et $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$:
$f(-1) = -(-1)^3 - (-1)^2 - 1 + 1 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$
$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{1}{3} + 1 = -\dfrac{1}{27} - \dfrac{3}{27} + \dfrac{9}{27} + \dfrac{27}{27} = \dfrac{32}{27}$

- **Exemple 3 :**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.
- Dérivée : $f'(x) = \dfrac{1(x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$
D'où, $f'(x) = \dfrac{(1 - x)(1 + x)}{(x^2 + 1)^2}$ (on factorise)
- Etude du signe de la dérivée :
$(1 - x)$ est du premier degré et s'annule pour $x = 1$. On applique la règle "signe de $a = -1$ après le 0" (donc $-$ après le 0).
$(1 + x)$ est du premier degré et s'annule pour $x = -1$. On applique la règle "signe de $a = 1$ après le 0" (donc $+$ après le 0).
$(x^2 + 1)^2$ a un "signe évident" car un carré est toujours positif.

- Tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	

Le tableau a été complété par le calcul de $f(-1)$ et $f(1)$:
$f(-1) = \dfrac{-1}{(-1)^2+1} = -\dfrac{1}{2}$
$f(1) = \dfrac{1}{1^2+1} = \dfrac{1}{2}$