

THEME : Correction

MILIEUX ET PARALLELES DANS UN TRIANGLE CORRECTION(S) EXERCICES SERIE 1

► Exercice :

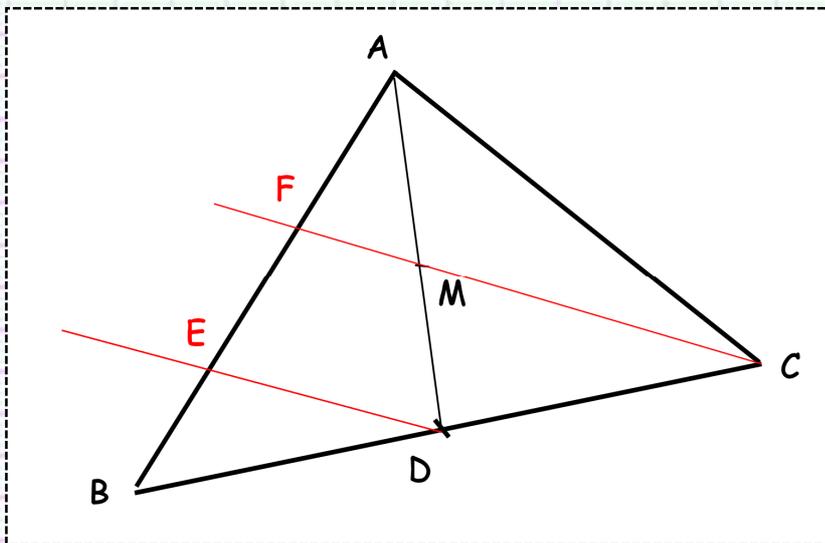
Soit ABC un triangle. Soit D le milieu de $[BC]$. Soit M le milieu de $[AD]$.

Les parallèles à la droite (CM) passant par D et C coupent la droite (AB) respectivement en E et F .

- Faire une figure.
- Montrer que E est milieu de $[BF]$.
- Montrer que F est milieu de $[AE]$.
- En déduire que $BE = EF = FA$.

Correction :

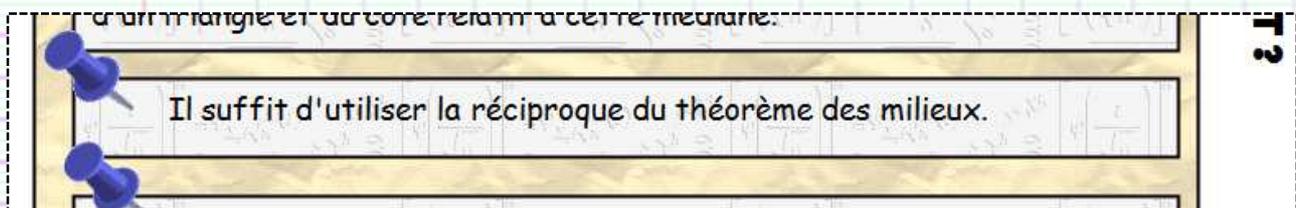
a) Figure :

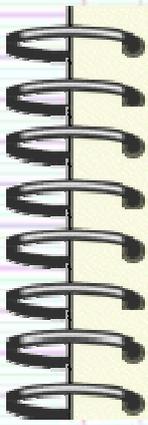


b) Milieu de $[BF]$:

Il existe plusieurs moyens pour démontrer qu'un point est milieu d'un segment.

Un outil est la réciproque du théorème des milieux.





Réciproque du théorème des milieux

Soit ABC un triangle.

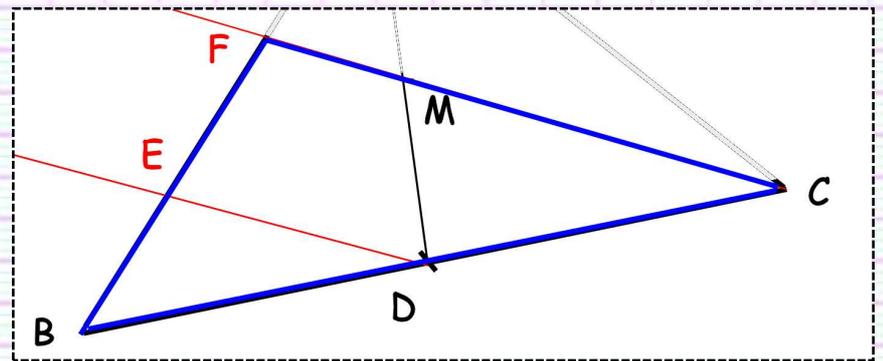
Soit I le milieu de [AB]. (J est un point de (AC))

Si (IJ) est parallèle à (BC) alors J est milieu de [AC].

Dans un triangle, la droite parallèle à un côté qui passe par le milieu d'un deuxième côté coupe le troisième côté en son milieu.

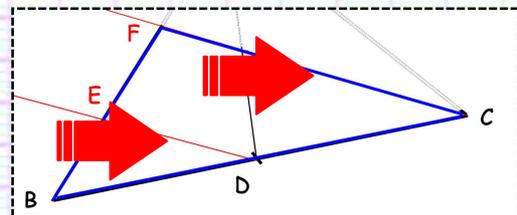
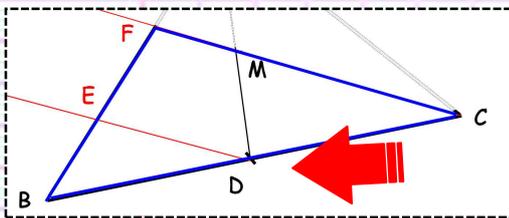
Nous désirons démontrer que E est milieu du segment [BF]. Si notre intention est d'utiliser la réciproque des milieux, le segment [BF] doit être un côté de triangle.

En regardant le dessin, nous constatons qu'il existe un triangle déjà défini qui possède [BF] comme côté, à savoir le triangle BFC!



Le triangle étant choisi, nous devons avoir :

- ▷ un milieu de côté (D est milieu d'un côté)



- ▷ des droites parallèles (un côté et une droite passant par ce milieu... et par le point E futur milieu)

La rédaction est donc la suivante :

Dans la triangle BCF ,

- ▶ D est milieu de [BC] (hypothèse)

- ▶ (DE) || (CF) (hypothèse)

Donc, d'après la réciproque du théorème des milieux, le point E (qui appartient à [BF]) est milieu de [BF].

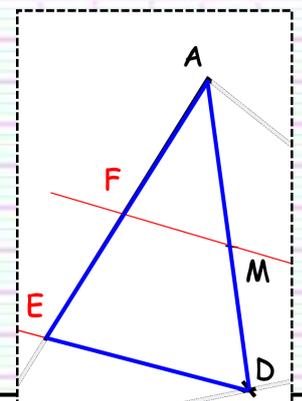
E milieu de [BF]

c) Milieu de [AE] :

Nous allons procéder de la même manière que précédemment.

Le triangle AED est un triangle ayant comme côté [AE]. Dans ce triangle, nous avons un milieu (le point M est milieu de [AD]) et deux droites parallèles (les droites (DE) et (MF) - encore appelé (CM)).

Nous pouvons donc écrire :



Dans le triangle AED ,

► M est milieu de [AD] (hypothèse)

► (CM) || (ED) (hypothèse)

donc (MF) || (ED)

Donc, d'après la réciproque du théorème des milieux, le point F (qui appartient à [AE]) est milieu de [AE].

F milieu de [AE]

d) Egalité $BE = EF = FA$:

▷ E milieu de [BF] (question b)

donc $BE = EF$

▷ F milieu de [AE] (question b)

donc $EF = FA$

Ces deux égalités permettent d'écrire :

$BE = EF = FA$

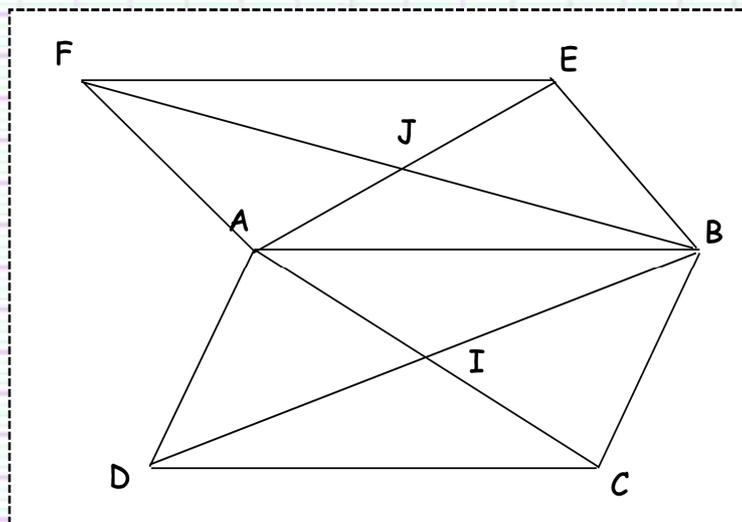
► *Exercice :*

Soient ABCD et ABEF deux parallélogrammes de centres respectifs I et J.

a) Montrer, en utilisant la droite (IJ), que les droites (DF) et (CE) sont parallèles.

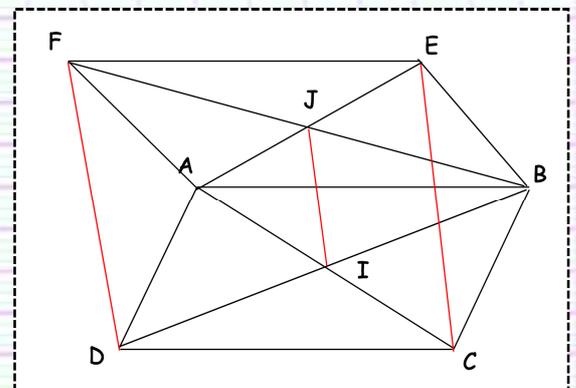
b) En déduire la nature du quadrilatère DCEF.

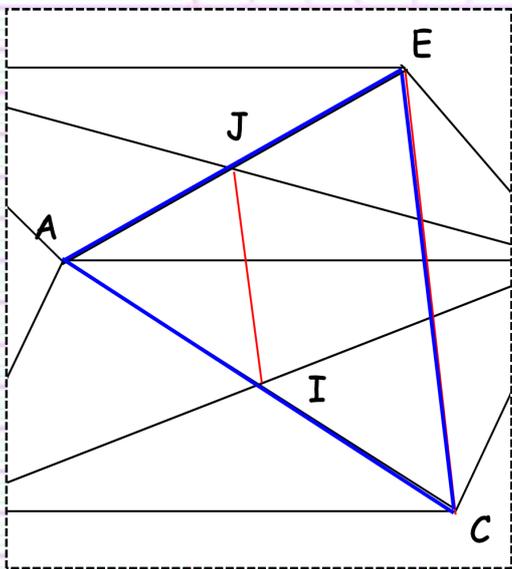
Correction :



a) Positions relatives des droites (DF) et (CE) :

Pour démontrer que les deux droites (DF) et (CE) sont parallèles, nous allons démontrer que ces deux droites sont parallèles à une même droite (IJ).





Dans le triangle AEC,

- ▷ I milieu de [AC] (I centre du parallélogramme ABCD)
 - ▷ J milieu de [AE] (J centre du parallélogramme ABEF)
- donc, d'après le théorème des milieux,

$$(IJ) \parallel (CE)$$

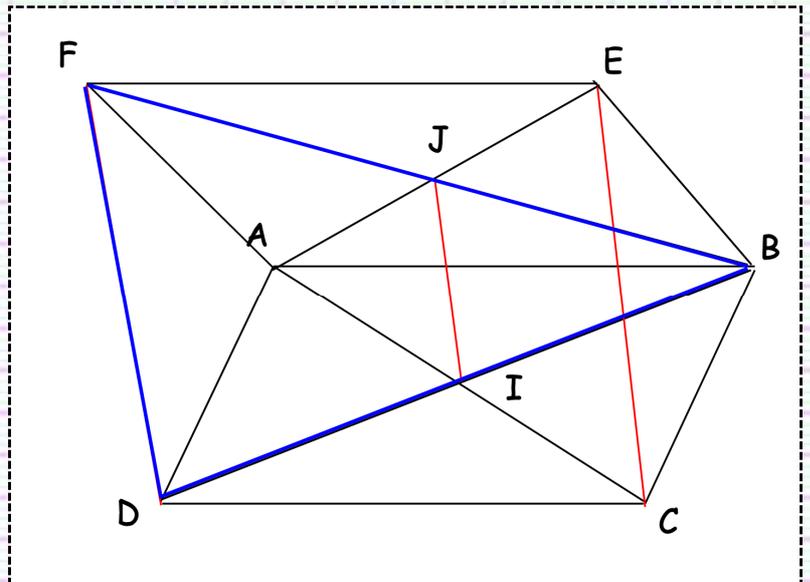
Dans le triangle BFD,

- ▷ I milieu de [BD] (I centre du parallélogramme ABCD)

- ▷ J milieu de [BF] (J centre du parallélogramme ABEF)

donc, d'après le théorème des milieux,

$$(IJ) \parallel (DF)$$

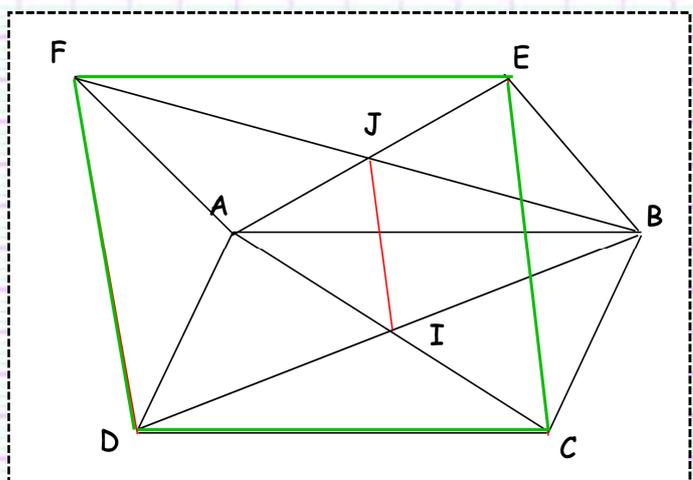


$$\triangleright (IJ) \parallel (CE)$$

$$\triangleright (IJ) \parallel (DF)$$

donc $(CE) \parallel (DF)$

b) Nature du quadrilatère DCEF :



$$(AB) \parallel (DC) \text{ (côtés opposés du parallélogramme ABCD)}$$

$$(AB) \parallel (EF) \text{ (côtés opposés du parallélogramme ABEF)}$$

donc $(DC) \parallel (EF)$

Conclusion :

▷ (DC) || (EF) (voir ci-dessus)

▷ (CE) || (DF) (question a)

donc les côtés opposés du quadrilatère DCEF sont parallèles

donc

DCEF est un parallélogramme.

► Exercice :

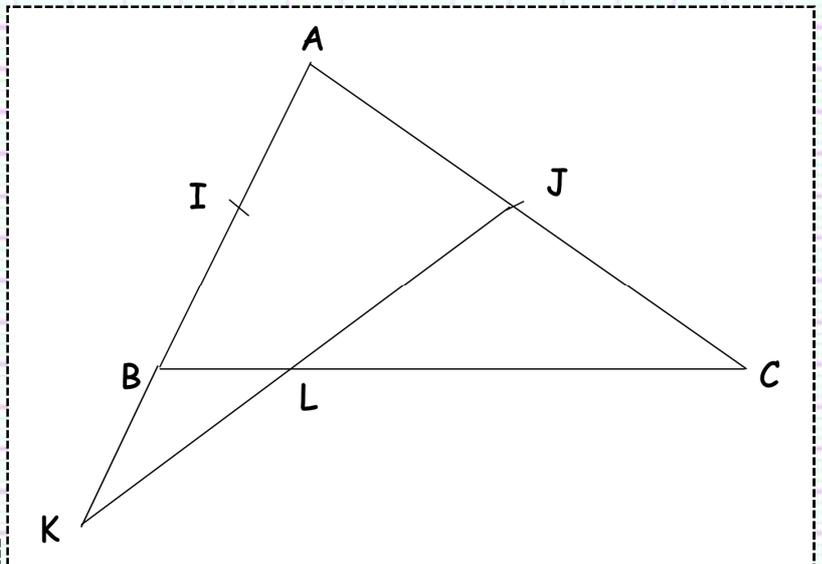
Soit ABC un triangle. Soient I et J les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC]. Soit K le symétrique de I par rapport à B. La droite (KJ) coupe la droite (BC) en L.

Démontrer que le point L est milieu de [KJ].

(On pourra commencer par démontrer que (IJ) est parallèle à (BL).)

Correction :

Une aide nous est donnée. Il est demandé de démontrer que les droites (IJ) et (BL) (ou (BC)) sont parallèles.



► Positions relatives des droites (IJ) et (BC) :

Dans le triangle ABC,

▷ I milieu de [AB] (hypothèse)

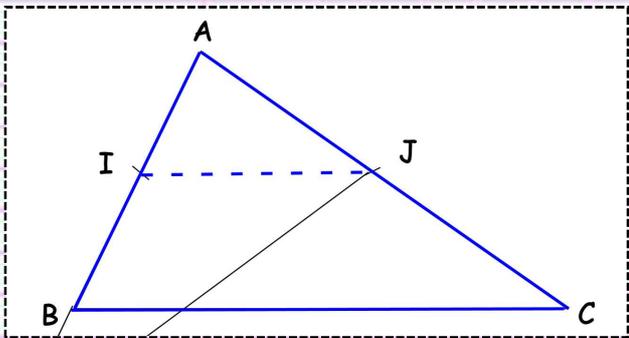
▷ J milieu de [AC] (hypothèse)

donc, d'après le théorème des milieux,

$$(IJ) \parallel (BC)$$

et par suite (L étant un point de (BC))

$$(IJ) \parallel (BL)$$



► Milieu de [KJ] :

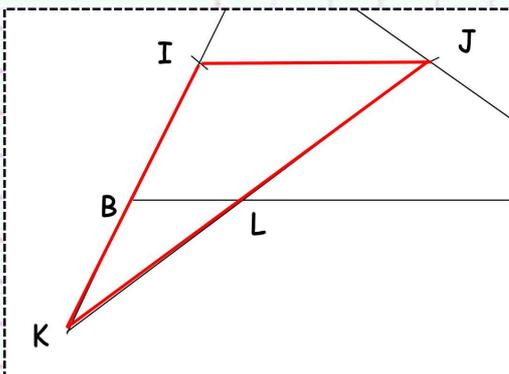
Dans le triangle KIJ,

▷ B est milieu de [IK] (K est le symétrique de I par rapport à B)

▷ (IJ) || (BL) (démonstration ci-dessus)

donc, d'après la réciproque du théorème des milieux, le point L (L appartient à [KJ]) est milieu de [KJ].

L milieu de [KJ]

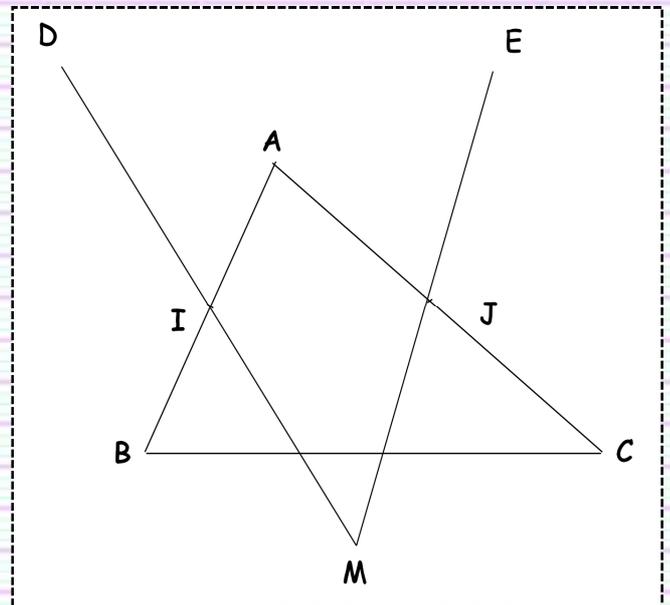
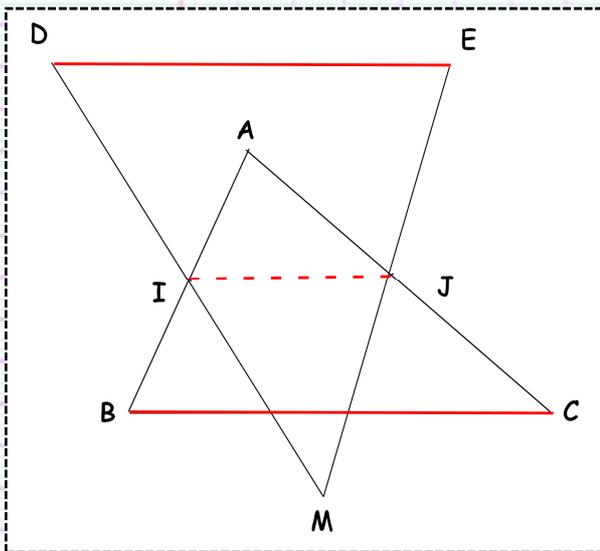


► Exercice :

Soit ABC un triangle. Soient I et J les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[AC]$. Soit M un point quelconque du plan distinct de I et de J . Soit D le symétrique de M par rapport au point I et soit E le symétrique de M par rapport au point J .
Montrer que les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

Correction :

Pour démontrer que les droites (BC) et (DE) sont parallèles, nous allons démontrer que ces deux droites sont parallèles à une même troisième, à savoir la droite (IJ) .



Comment démontrer que ?

DEUX DROITES SONT PARALLELES

Il suffit de démontrer que ces deux droites sont parallèles à une même troisième.

Il suffit de démontrer que ces deux droites sont perpendiculaires

COMMENT DEMON

► Positions relatives des droites (IJ) et (BC) :

Dans le triangle ABC ,

- ▷ I milieu de $[AB]$ (hypothèse)
- ▷ J milieu de $[AC]$ (hypothèse)

donc, d'après le théorème des milieux,

$$(IJ) \parallel (BC)$$

► Positions relatives des droites (IJ) et (DE) :

Dans le triangle MDE ,

- ▷ I milieu de $[MD]$ (D symétrique de M par rapport à I)
- ▷ J milieu de $[ME]$ (E symétrique de M par rapport à J)

donc, d'après le théorème des milieux,

$$(IJ) \parallel (BC)$$

► Conclusion :

$$(IJ) \parallel (BC) \text{ et } (IJ) \parallel (DE)$$

donc

$$(BC) \parallel (DE)$$