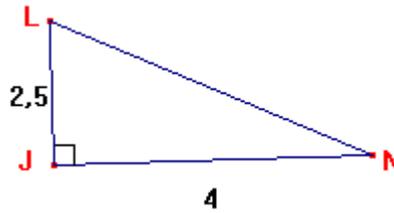


Théorème de Pythagore : Exercices d'applications

1- Calcul de l'hypoténuse :

LJN est un triangle rectangle en J, tel que :
 LJ = 2,5 cm et JN = 4 cm .
 Calculer LN (donner la valeur exacte, puis l'arrondi au dixième).

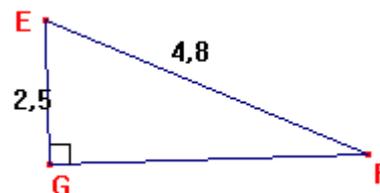


On est ici dans le cas où on peut utiliser le théorème de Pythagore pour calculer une longueur, puisque le triangle LJN **est rectangle** et on connaît les **longueurs de deux côtés**.

Rédaction	Commentaires
<p>Puisque le triangle LJN est rectangle en J alors d'après le théorème de Pythagore :</p> $ \begin{aligned} JL^2 + JN^2 &= LN^2 \\ 2,5^2 + 4^2 &= LN^2 \\ 6,25 + 16 &= LN^2 \\ LN^2 &= 22,25 \\ LN &= \\ LN &\approx 4,7 \text{ cm.} \end{aligned} $	<p>On s'assure que le triangle est rectangle On applique le théorème à ce triangle rectangle. Si un triangle est rectangle alors</p> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 5px; margin: 5px 0; text-align: center;"> La somme des carrés des longueurs des deux côtés de l'angle droit </div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 5px; margin: 5px 0; text-align: center;"> est égale au carré de la longueur de l'hypoténuse. </div> <div style="text-align: center; margin: 5px 0;"> $JL^2 + JN^2 = LN^2$ </div> <p>On reporte les valeurs connues dans cette égalité</p> <p>est la valeur exacte de LN Avec la calculatrice, on trouve: 4,716.... Le chiffre des centièmes étant 1, l'arrondi au dixièmes est 4,7</p>

2) Calcul d'un côté de l'angle droit :

EFG est un triangle rectangle en G tel que :
 EG = 2,5 cm et EF = 4,8 cm.
 Calculer GF (donner la valeur exacte, puis l'arrondi au dixième).

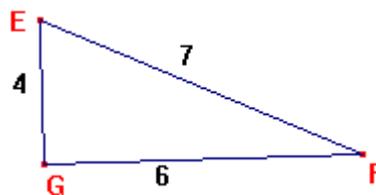


On est ici dans le cas où on peut utiliser le théorème de Pythagore pour calculer une longueur, puisque le triangle EFG **est rectangle** et on connaît les **longueurs de deux côtés**.

Rédaction	Commentaires
<p>Puisque le triangle EFG est rectangle en G Alors d'après le théorème de Pythagore :</p> $GE^2 + GF^2 = EF^2$ $2,5^2 + GF^2 = 4,8^2$ $6,25 + GF^2 = 23,04$ $GF^2 = 23,04 - 6,25$ $GF^2 = 16,79$ $GF = \sqrt{16,79}$ $GF \approx 4,1 \text{ cm.}$	<p>On s'assure que le triangle est rectangle On applique le théorème à ce triangle rectangle. Si un triangle est rectangle alors</p> <p>La somme des carrés des longueurs des deux côtés de l'angle droit</p> <p>est égale au carré de la longueur de l'hypoténuse.</p> $GE^2 + GF^2 = EF^2$ <p>On reporte les valeurs connues dans cette égalité</p> <p>$\sqrt{16,79}$ est la valeur exacte de GF. Avec la calculatrice, on trouve :4,097..... Le chiffre des centièmes étant 9, l'arrondi au dixièmes est 4,1</p>

3) Montrer qu'un triangle n'est pas rectangle :

EFG est un triangle tel que :
EF = 7 cm, EG = 4 cm et GF = 6 cm.
Montrer que le triangle EGF n'est pas rectangle.



On est ici dans le cas où on peut utiliser la conséquence du théorème de Pythagore, puisqu'on connaît les longueurs des trois côtés.

Énoncé :

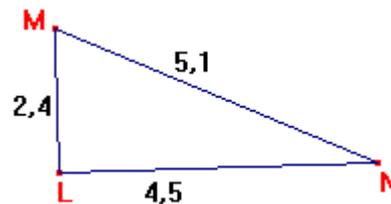
Dans un triangle,
si le carré du plus grand côté n'est pas égal \longrightarrow EF^2
à la somme des carrés des deux autres côtés, \longrightarrow $EG^2 + GF^2$
alors ce triangle n'est pas rectangle.

Donc pour bien rédiger, on **doit d'abord effectuer les calculs** et ensuite comparer les résultats.

Rédaction	Commentaires
Dans le triangle EFG, $EF^2 = 7^2 = 49$	On repère le côté le plus long et on calcule le carré de sa longueur.
$EG^2 + GF^2 =$ $4^2 + 6^2 =$ $16 + 36 = 52$	On calcule la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.
On a donc $EF^2 \neq EG^2 + GF^2$ donc d'après la conséquence du théorème de Pythagore, le triangle EFG n'est pas rectangle.	En effet si le triangle était rectangle, d'après le théorème de Pythagore l'égalité $EF^2 = EG^2 + GF^2$ serait vraie. Or elle est fausse, donc le triangle n'est pas rectangle.

4) Montrer qu'un triangle est rectangle :

LMN est un triangle tel que :
 $MN = 5,1$ cm, $ML = 2,4$ cm et $LN = 4,5$ cm.
 Montrer que le triangle LMN est rectangle.



On est ici dans le cas où on peut utiliser la réciproque du théorème de Pythagore, puisqu'on connaît les longueurs des trois côtés.

Énoncé :

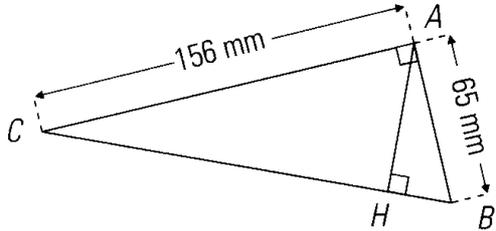
Dans un triangle, si le carré du plus grand côté est égal	→ MN^2
à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.	→ $LM^2 + LN^2$

Donc pour bien rédiger, on **doit d'abord effectuer les calculs** et ensuite comparer les résultats.

Rédaction	Commentaires
Dans le triangle LMN, $MN^2 = 5,1^2 = 26,01$	On repère le côté le plus long et on calcule le carré de sa longueur.
$LM^2 + LN^2 =$ $2,4^2 + 4,5^2 =$ $5,76 + 20,25 = 26,01$	On calcule la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.
On a donc $MN^2 = LM^2 + LN^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle LMN est rectangle en L.	[MN] est le côté le plus long donc c'est l'hypoténuse, donc L est le sommet de l'angle droit.

Théorème de Pythagore : Exercices d'approfondissement et de recherche

Exercice 1 :

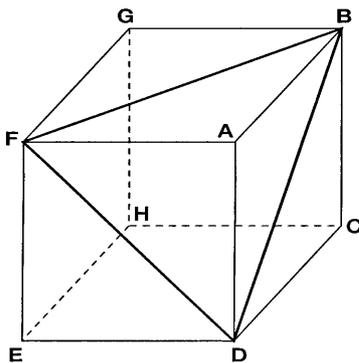


- 1) Reproduis la figure en vraie grandeur.
- 2) Calcule BC.
- 3) Exprime l'aire du triangle ABC en fonction de AC et AB. Calcule-la.
- 4) Exprime son aire en fonction de BC et AH. Dédus-en que $AH = 60$ mm.
- 5) Calcule alors CH puis HB.

Exercice 2 :

Soit (C) un cercle de centre O et de 3 cm de rayon. A est un point de (C) . (C') est un cercle de centre A et de 3 cm de rayon. (C) et (C') se coupent en M et N .
Calculer MN (donner un arrondi à $0,1$ cm près).

Exercice 3 :



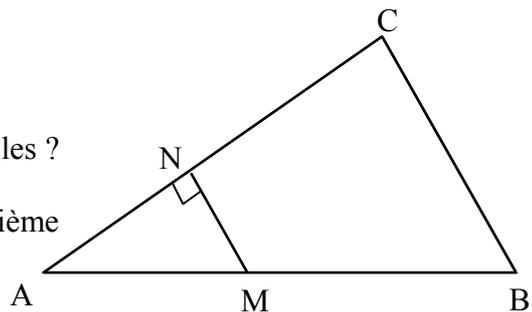
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.
 $AF = 3,9$ cm ; $AD = 8$ cm et $FB = 6,5$ cm.

- 1) Calcule la longueur FD .
- 2) a) Quelle est la nature du triangle FAB ? Dessine-le en vraie grandeur.
b) Calcule la longueur AB .
- 3) Calcule la longueur BD . Donne sa valeur exacte puis une valeur approchée à $0,1$ près.
- 4) Le triangle FBD est-il rectangle ?

Exercice 4 :

$AN = 2$ cm, $NC = 3$ cm, $CB = 3,3$ cm
 $AM = 2,4$ cm, $AB = 6$ cm.

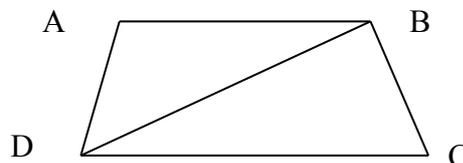
- a) Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.
- b) Calcule une valeur approchée arrondie au dixième près de MN .



Exercice 5 :

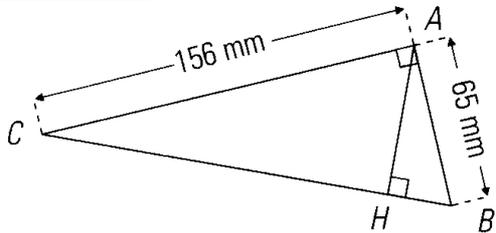
Construire un trapèze $ABCD$ de bases $[AB]$ et $[DC]$ avec les dimensions suivantes : $AB = 4,5$ cm ; $AD = 2,8$ cm ; $DB = 5,3$ cm ; $DC = 6,5$ cm

- a) Que peut-on dire du triangle ABD ?
- b) Calculer AC . Justifier



Corrigé des exercices

Exercice 1 :



- 1.1) Reproduis la figure en vraie grandeur.
- 1) Calcule BC.
- 2) Exprime l'aire du triangle ABC en fonction de AC et AB. Calcule-la.
- 3) Exprime son aire en fonction de BC et AH. Déduis-en que $AH = 60$ mm.
- 4) Calcule alors CH puis HB.

Correction :

2) Puisque le triangle ABC est rectangle en A, alors d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \text{ donc } BC^2 = 156^2 + 65^2 = 28561$$

$$BC = \sqrt{28561} = 169 \text{ mm.}$$

3) $A = \frac{1}{2} \times AC \times AB$ donc $A = \frac{1}{2} \times 156 \times 65 = 5070 \text{ mm}^2$.

4) $A = \frac{1}{2} \times BC \times AH$ donc $5070 = \frac{1}{2} \times 169 \times AH$ c'est à dire $AH = 60$

$AH = 60$ donc $AH = 60$ mm.

5) Puisque le triangle AHC est rectangle en H, alors d'après le théorème de Pythagore :

$$HC^2 + HA^2 = AC^2 \text{ donc } HC^2 + 60^2 = 156^2$$

$$HC^2 + 3600 = 24336 \text{ donc } HC^2 = 24336 - 3600 = 20736$$

$$HC = \sqrt{20736} \text{ d'où } HC = 144 \text{ mm.}$$

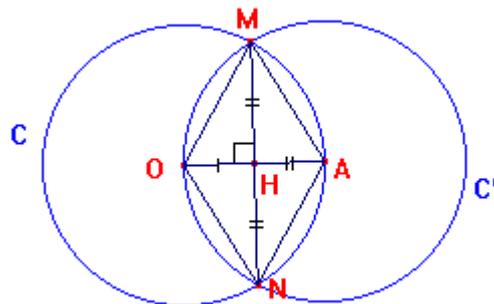
De même $HB = 25$ mm.

Exercice 2 :

Soit (C) un cercle de centre O et de 3cm de rayon. A est un point de (C) . (C') est un cercle de centre A et de 3cm de rayon. (C) et (C') se coupent en M et N.

Calculer MN (donner un arrondi à 0,1cm près).

Solution :



Les points M et N sont situés sur le cercle (C) donc $OM = ON = 3$ cm.

Les points M et N sont situés sur le cercle (C') donc $AM = AN = 3$ cm.

On a donc $OM = ON = AM = AN$ et par suite le quadrilatère AMON est un losange.

« Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales ont le même milieu et sont perpendiculaires ».

Donc $(OA) \perp (MN)$, $MN = 2 \times HM$ et $OH = HA = 1,5$ cm.

Puisque le triangle OHM est rectangle en H alors d'après le théorème de Pythagore :

$$OH^2 + HM^2 = OM^2$$

$$1,5^2 + HM^2 = 3^2$$

$$HM^2 = 9 - 2,25$$

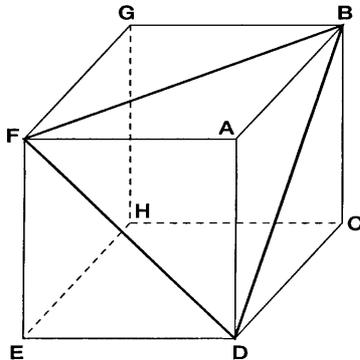
$$HM^2 = 6,75$$

$$2,25 + HM^2 = 9$$

$$MN = \quad MN \approx 5,2 \text{ cm}$$

$$HM =$$

Exercice 3:



ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

AF = 3,9 cm ; AD = 8 cm et FB = 6,5 cm.

1) Calcule la longueur FD.

2) a) Quelle est la nature du triangle FAB ? Dessine-le en vraie grandeur.

b) Calcule la longueur AB.

3) Calcule la longueur BD. Donne sa valeur exacte puis une valeur approchée à 0,1 près.

4) Le triangle FBD est-il rectangle ?

Solution :

1) ABCDEFGH est un pavé droit donc toutes ses faces sont des rectangles.

Donc ADEF est un rectangle et par suite le triangle DAF est rectangle en A.

Puisque le triangle ADF est rectangle en A, alors d'après le théorème de Pythagore :

$$FD^2 = AF^2 + AD^2 \text{ donc } FD^2 = 3,9^2 + 8^2 = 79,21.$$

$$FD = \sqrt{79,21} \text{ donc } FD = 8,9 \text{ cm.}$$

2) a) Le triangle FAB est rectangle en A.

$$\text{b) De même on trouve : } AB^2 + AF^2 = FB^2 \text{ donc } AB^2 + 3,9^2 = 6,5^2$$

$$AB^2 + 15,21 = 42,25 \text{ donc } AB^2 = 42,25 - 15,21 = 27,04.$$

$$AB = \sqrt{27,04} \text{ donc } AB = 5,2 \text{ cm.}$$

3) Dans le triangle ABD rectangle en A : $BD^2 = 91,04$, $BD = \sqrt{91,04} \approx 9,5 \text{ cm.}$

4) Dans le triangle BDF,

$$BD^2 = 91,04$$

$$FB^2 + FD^2 =$$

$$6,5^2 + 8,9^2 = 121,46$$

On a donc $BD^2 \neq FB^2 + FD^2$ donc d'après

la conséquence du théorème de Pythagore, le triangle BDF n'est pas rectangle.

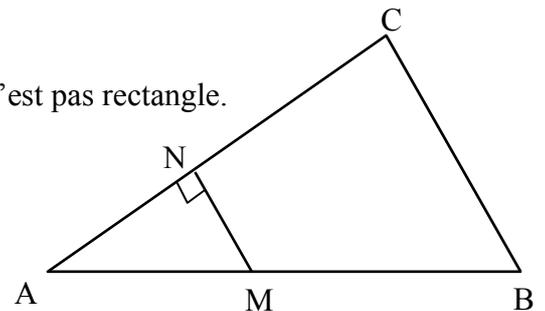
Exercice 4 :

$$AN = 2 \text{ cm, } NC = 3 \text{ cm, } CB = 3,3 \text{ cm}$$

$$AM = 2,4 \text{ cm, } AB = 6 \text{ cm.}$$

a) Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.

b) Calcule une valeur approchée arrondie au dixième près de MN.



Solution :

a) Montrons d'abord que le triangle ABC est ou n'est pas rectangle en C.

$$AB^2 = 6^2 = 36, \quad CA^2 + CB^2 = 5^2 + 3,3^2 = 35,89.$$

$AB^2 \neq CA^2 + CB^2$ donc d'après la conséquence du théorème de Pythagore le triangle ABC n'est pas rectangle.

(BC) et (MN) ne sont pas parallèles car si elles l'étaient on aurait $(BC) \perp (AC)$ d'après la propriété : Si deux droites sont parallèles et qu'une troisième droite est perpendiculaire à l'une, alors elle est aussi perpendiculaire à l'autre.

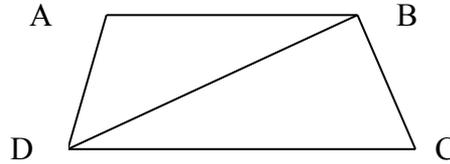
Ce qui est faux ici.

- b) Puisque le triangle AMN est rectangle en N, alors d'après le théorème de Pythagore :
 $AN^2 + MN^2 = AM^2$ donc $2^2 + MN^2 = 2,4^2$
 $MN^2 + 4 = 5,76$ donc $MN^2 = 5,76 - 4 = 1,76$
 $MN = \sqrt{1,76}$ où $MN \approx 1,3$ cm

Exercice 5 :

Construire un trapèze ABCD de bases [AB] et [DC] avec les dimensions suivantes : $AB = 4,5$ cm ;
 $AD = 2,8$ cm ; $DB = 5,3$ cm ; $DC = 6,5$ cm

- a) Que peut-on dire du triangle ABD ?
 b) Calculer AC. Justifier



- a) Dans le triangle ABD,
 $BD^2 = 5,3^2 = 28,09$

$$AD^2 + AB^2 =$$

$$2,8^2 + 4,5^2 =$$

$$7,84 + 20,25 = 28,09$$

On a donc $BD^2 = AD^2 + AB^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABD est rectangle en A.

- b) $(AB) \perp (AD)$ et $(AB) \parallel (DC)$ donc $(AD) \perp (DC)$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ADC rectangle en D, on trouve :
 $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{2,8^2 + 6,5^2} = \sqrt{45,64} \approx 6,76$ cm.