

THEME 8

INITIATION A LA GEOMETRIE EXERCICE CORRIGE

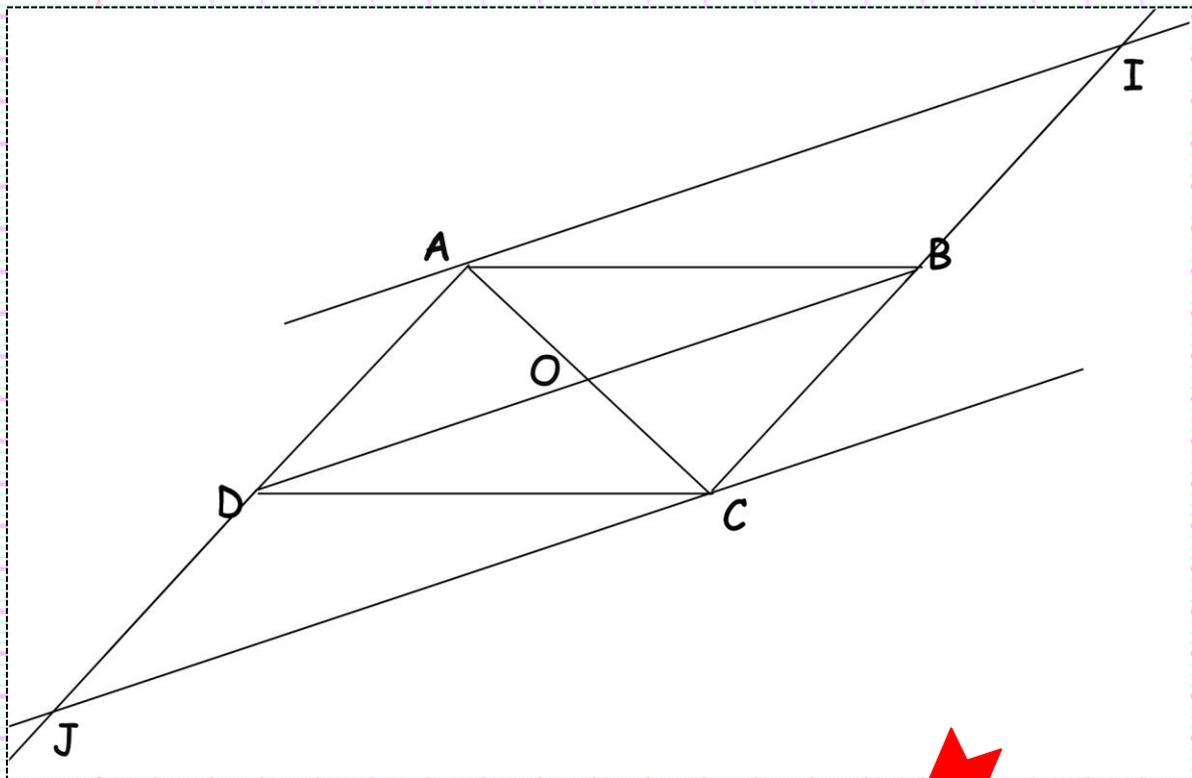
Exercice :

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O . La parallèle à la droite (BD) passant par A coupe la droite (BC) en I . La parallèle à la droite (BD) passant par C coupe la droite (AD) en J .

- Faire un dessin.
- Démontrer que le quadrilatère $AICJ$ est un parallélogramme.
- Démontrer que O est le milieu du segment $[IJ]$.

Solution :

a) Dessin :



b) Nature du quadrilatère $AICJ$:

Conjecture (Idée non vérifiée, fondée sur l'apparence du dessin) : Il semble le quadrilatère $AICJ$ soit un parallélogramme. Essayons donc de le démontrer.

Oublions provisoirement l'exercice et son dessin.

De quels outils disposons-nous pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme ?

Deux outils existent :



Comment démontrer que ?

UN QUADRILATÈRE EST UN PARALLELOGRAMME

Il suffit de démontrer que les côtés opposés sont parallèles.

Il suffit de démontrer que les diagonales ont même milieu.

COMMENT DEMONTRER

Revenons maintenant à l'exercice proposé.

Doit-on démontrer que les côtés opposés sont parallèles ou que les diagonales ont le même milieu ?

En relisant le texte, certains mots apparaissent.

Exercice :

Soit ABCD un parallélogramme de centre O. La parallèle à la droite (BD) passant par A coupe la droite (BC) en I. La parallèle à la droite (BD) passant par C coupe la droite (AD) en J.

Le mot « parallèle » apparaît deux fois. En approfondissant un peu, même le mot parallélogramme de la première phrase peut faire penser au mot parallèle. Il semble donc que la méthode à utiliser est la première :

Il suffit de démontrer que les côtés opposés sont parallèles.

Commençons alors la démonstration par la fin.

b) Nature du quadrilatère AICJ

.....
.....
.....
.....
.....

donc AICJ est un parallélogramme.

La dernière phrase de la démonstration sera celle-ci !

D'après la recherche précédente, nous pourrions certainement affirmer que le quadrilatère est un parallélogramme parce que nous aurons démontré que les côtés opposés sont parallèles. Nous pouvons donc compléter la rédaction précédente en écrivant :

b) Nature du quadrilatère AICJ

.....
.....
.....

Pour l'instant, cette « affirmation » n'est pas démontrée

Les côtés opposés du quadrilatère AICJ sont parallèles

donc AICJ est un parallélogramme.

Nous devons donc maintenant démontrer que les côtés [AI] et [CJ] sont parallèles , ainsi que les deux côtés [AJ] et [IC]. (Remarquons que le parallélisme est une propriété des droites et pas des segments. Lorsque nous parlons de côtés parallèles, il faut entendre les supports des côtés !!!)

Démontrons tout d'abord que les côtés [AI] et [CJ] sont parallèles :

Encore une fois, oublions le problème posé. De quels outils disposons-nous pour démontrer que deux droites sont parallèles ?



Comment démontrer que ?

COMMENT DEMONTRER QUE D

DEUX DROITES SONT PARALLELES

Il suffit de démontrer que ces deux droites sont parallèles à une même troisième.

Il suffit de démontrer que ces deux droites sont perpendiculaires à une même troisième.

Il suffit de démontrer que ces deux droites sont les supports des côtés opposés d'un parallélogramme.

Les outils mis à notre disposition, revenons à notre exercice.

La première méthode consiste à démontrer que les deux droites en question sont parallèles à une troisième. Le dessin ici, même si aucune référence au dessin ne se fera dans la démonstration, nous permet de constater que droite est certainement parallèle à nos deux droites (AI) et (CJ). Cette droite est la droite (BD).

Hypothèse : écrit dans le texte.

...La parallèle à la droite (BD) passant par A coupe la droite (BC) en I...

(AI) || (BD) (hypothèse)

(CJ) || (BD) (hypothèse)

donc (AI) || (CJ)

donc (AI) || (CJ)

Réécrivons cette démonstration dans la rédaction principale. Nous avons :

b) Nature du quadrilatère AICJ

► $(AI) \parallel (BD)$ (hypothèse)

$(CJ) \parallel (BD)$ (hypothèse)

donc $(AI) \parallel (CJ)$

Deux côtés opposés sont parallèles.

Les côtés opposés du quadrilatère AICJ sont parallèles

donc AICJ est un parallélogramme.

Démontrons maintenant que les côtés [AJ] et [CI] sont parallèles :

Encore une fois, oublions le problème posé. De quels outils disposons-nous pour démontrer que deux droites sont parallèles ?



FICHE 1

Comment démontrer que ?

DEUX DROITES SONT PARALLELES

Il suffit de démontrer que ces deux droites sont parallèles à une même troisième.

Il suffit de démontrer que ces deux droites sont perpendiculaires à une même troisième.

Il suffit de démontrer que ces deux droites sont les supports des côtés opposés d'un parallélogramme.

COMMENT DEMONTRER QUE D

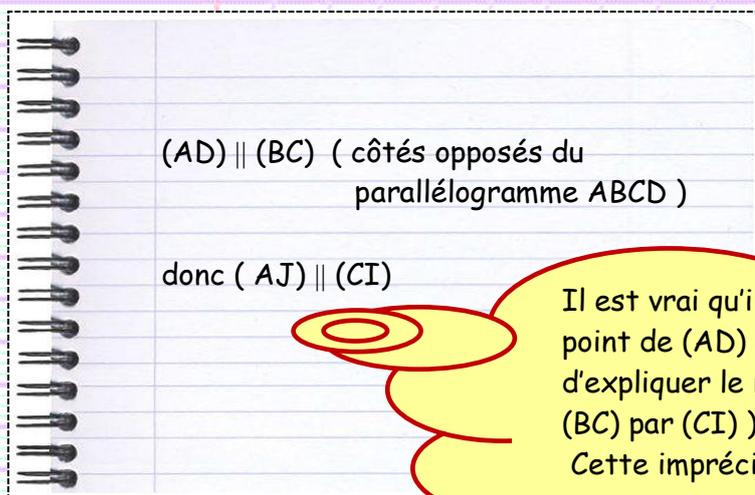
▷ Premier outil : Les deux droites (AJ) et (CI) sont-elles parallèles à une autre troisième droite ? Apparemment non, si nous regardons le dessin.

▷ Deuxième outil : Les deux droites (AJ) et (CI) sont-elles perpendiculaires à une même troisième droite ?

Toujours en faisant référence au dessin, nous pouvons répondre non.

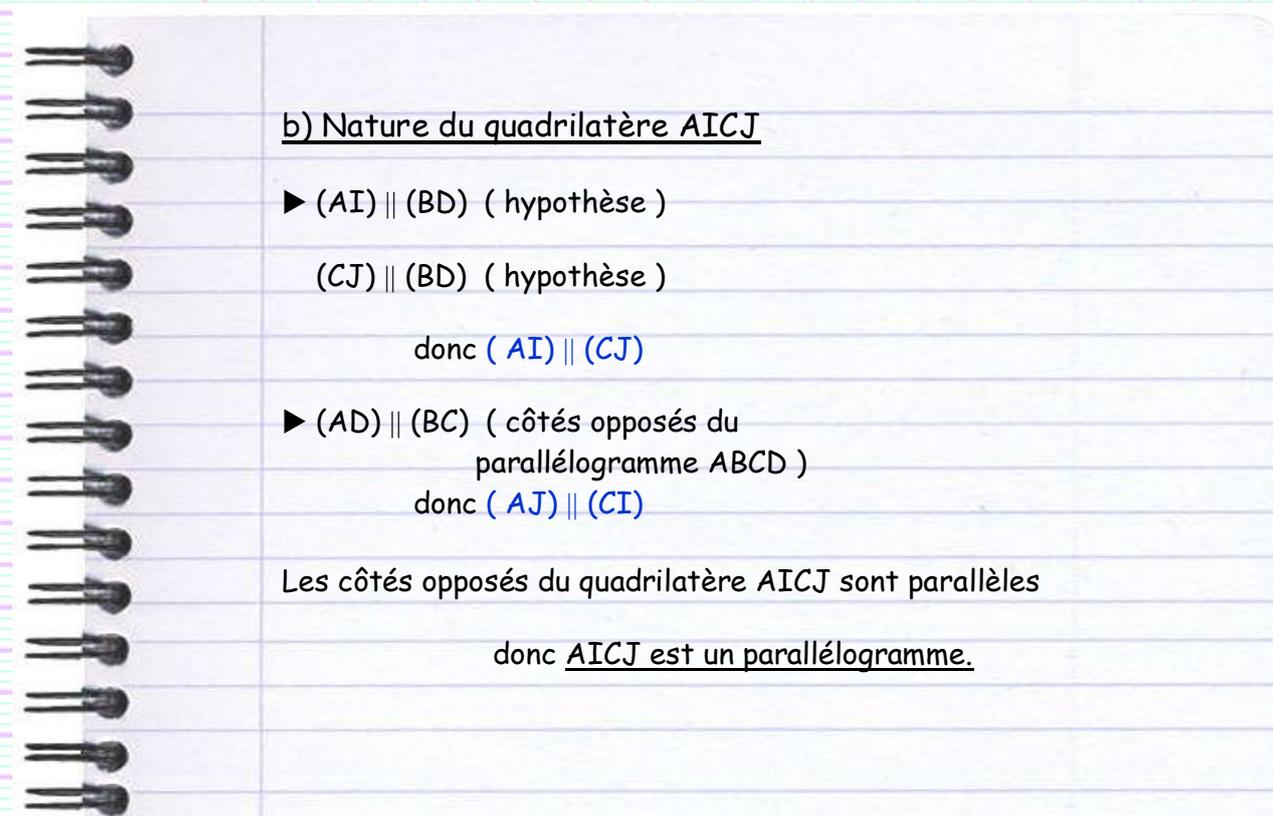
▷ Troisième outil : Les deux droites (AJ) et (CI) sont-elles des côtés opposés (en vérité les supports) d'un parallélogramme. La réponse ici est affirmative. Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme et donc les droites (AD) (aussi appelée (AJ)) et (BC) (aussi appelée (CJ)) sont parallèles.

Nous avons donc :

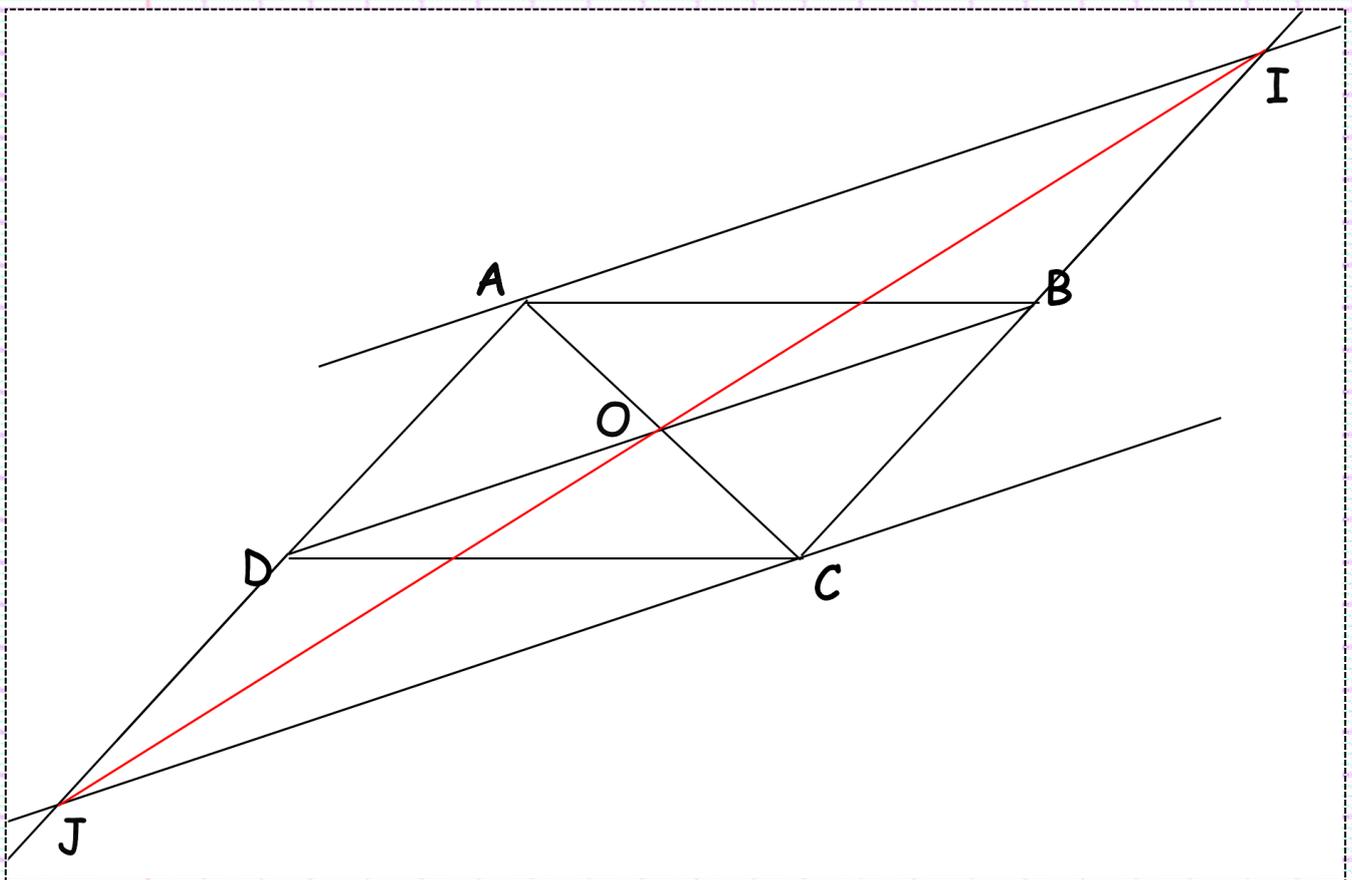


Il est vrai qu'il faudrait ici préciser que J est un point de (AD) et I un point de (BC) (ce qui permet d'expliquer le remplacement de (AD) par (AJ) de (BC) par (CI)). Cette imprécision est cependant tolérée.

Nous avons donc la rédaction (définitive) suivante :



c) Position du point O :



La question (c) apparait après la question (b) !!!!!!!!!!!!!

Cette remarque permet de préciser que les résultats des questions précédentes peuvent avoir une certaine importance dans la résolution de cette question.

Il est peut être dangereux ici de tracer la droite (IJ). Nous ignorons, pour l'instant, que le point O est un point de cette droite !

Recherche : Nous savons que le quadrilatère AICJ est un parallélogramme. Par conséquent, les diagonales ont même milieu. Le milieu de [IJ] est donc également le milieu de l'autre diagonale [AB].

Si nous connaissons le milieu de [AB], nous connaissons donc le milieu de [IJ].

Quel est donc le milieu de [AB]. Comme [AB] est une diagonale du parallélogramme ABCD de centre O, le milieu de [AB] est donc le point O.

Rédigeons cette recherche :

c) Position du point I :

- ▶ ABCD est un parallélogramme de centre O

donc O est milieu de [AB]

- ▶ AICJ est un parallélogramme (question précédente)
donc les diagonales [AB] et [IJ] ont même milieu
donc le milieu de [IJ] est le milieu de [AB]

donc O est milieu de [IJ].