THEME 8

CALCUL AVEC DES PUISSANCES DE DIX

Calcul avec des puissances de 10 :

Deux cas simples sont possibles.

- L'opération à effectuer ne comporte que des additions et/ou des soustractions.
- L'opération à effectuer ne comporte que des multiplications et/ou des divisions.

▶ 1ER CAS : ADDITIONS ET SOUSTRACTIONS :

$A = \underline{4 \times 10^{-2}} + \underline{36 \times 10^{-3}} - \underline{0,27 \times 10^{-1}}$

$A = 0,04 + 0,036 - 0,027$

$\boxed{A = 0,049}$

Etape 1 : On souligne les différents termes

Etape 2 : Chaque terme est écrit sous forme décimale.

Etape 3 : On effectue le calcul

$B = 3,1 \times 10^2 - 5,4 \times 10 + 213 \times 10^{-1}$ (CRETEIL - PARIS - VERSAILLES - 1990)

$B = 310 - 54 + 21,3$

$B = 277,3$

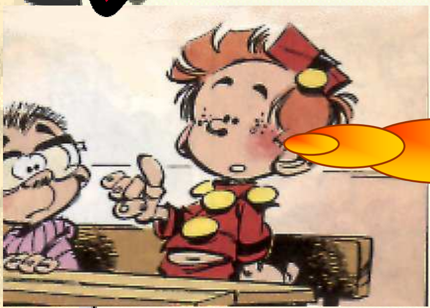
▶ 2ème CAS : MULTIPLICATIONS ET DIVISIONS :

▷ Multiplications :

Soit à effectuer

$A = 2 \times 10^{9} \times 7 \times 10^{-3} \times 0{,}03 \times 10^{-3}$

Etape 1 : Vérifier que l'opération est une suite de multiplications.



Comme, dans un produit, nous pouvons changer l'ordre des facteurs, l'expression A peut s'écrire différemment. Nous pouvons tout d'abord écrire le produit des facteurs qui ne sont pas des puissances de dix, puis écrire le produit des puissances de dix.

$A = \underline{2 \times 7 \times 0{,}03} \times \underline{10^{9} \times 10^{-3} \times 10^{-3}}$

$A = 0{,}42 \times 10^{9-3-3} = 0{,}42 \times 10^{3} = 420$

Nous pouvions également utiliser plus encore les connaissances sur les puissances de dix.
Il est plus difficile d'effectuer des opérations avec des nombres décimaux (non entiers). Les puissances de dix simplifient les calculs.
Nous savons que $0{,}03 = 3 \times 10^{-2}$
Donc

$A = 2 \times 10^{9} \times 7 \times 10^{-3} \times 0{,}03 \times 10^{-3}$

$A = 2 \times 10^{9} \times 7 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-2} \times 10^{-3}$

$A = 2 \times 7 \times 3 \times 10^{9} \times 10^{-3} \times 10^{-2} \times 10^{-3}$

$A = 42 \times 10^{9-3-2-3} = 42 \times 10^{1} = 420$

Soit à effectuer :

$A = 7 \times 10^{-3} \times 0{,}15 \times 10^{5}$

$A = 7 \times 10^{-3} \times 0{,}15 \times 10^{5}$

$A = 0{,}007 \times 15000$

$A = 105$

Cette façon de faire, c'est à dire revenir à l'écriture décimale, est à éviter dans le cas d'une suite de multiplications.
Il est préférable d'utiliser les propriétés des puissances de dix.
Pourriez-vous aussi simplement effectuer ce calcul ?

$A = 1{,}2 \times 10^{-147} \times 0{,}43 \times 10^{149}$

Revenons à notre calcul.
Nous pouvons changer 0,15 et l'écrire sous la forme :

$0{,}15 = 15 \times 10^{-2}$

Correction

$A = 7 \times 10^{-3} \times 0{,}15 \times 10^{5}$

$A = 7 \times 10^{-3} \times 15 \times 10^{-2} \times 10^{5}$

$A = 7 \times 15 \quad \times \quad 10^{-3} \times 10^{-2} \times 10^{5}$

Regroupement des nombres « significatifs » et des puissances de 10.

$A = 105 \times 10^{-3-2+5}$

$A = 105 \times 10^{0} = 105 \times 1 = 105$

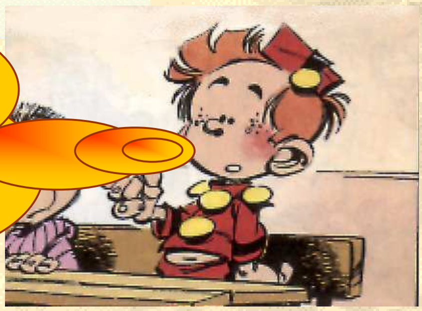
▷ Multiplications et divisions :

Soit à effectuer

$$A = \frac{4 \times 10^{6} \times 15 \times 10^{-3} \times 10^{4}}{12 \times 10^{5}}$$

Etape 1 : Vérifier que l'opération ne comporte que des multiplications et des divisions

Je regarde tout d'abord s'il n'y a pas une simplification immédiate (un même facteur au numérateur et au dénominateur). Ce n'est pas le cas dans cet exemple. Donc, pour effecteur cette division, il faut simplifier au maximum le numérateur et le dénominateur. Le dénominateur est sous une forme simple. Il suffit donc, dans cet exemple, de simplifier le numérateur.



Correction

$$A = \frac{4 \times 15 \times 10^{6} \times 10^{-3} \times 10^{4}}{12 \times 10^{5}}$$

N'effectuez pas les opérations (4 x 15). Il est préférable d'abord de vérifier si une simplification est possible.

Le numérateur est composé d'une suite de multiplications. Donc en procédant comme dans l'exercice précédent, nous avons :

$$A = \frac{4 \times 15 \times 10^{6-3+4}}{12 \times 10^{5}}$$

$$A = \frac{4 \times 15 \times 10^{7}}{12 \times 10^{5}}$$

Dans cette écriture, il y a deux parties. Les nombres 4 , 15 et 12 ont une influence sur l'écriture (en chiffres) du nombre. Les puissances de 10 n'ont qu'une influence sur la position de la « virgule ».
Simplifions séparément ces deux parties.

$$A = \frac{4 \times 15}{12} \times \frac{10^7}{10^5}$$

Pour simplifier les puissances de 10, nous utilisons ici le cours.
Sinon, il est possible d'imaginer l'écriture sous cette forme :

$$\frac{10^7}{10^5} = \frac{10\times10\times10\times10\times10\times10\times10}{10\times10\times10\times10\times10} = 10\times10 = 100$$

$$A = \frac{4\times15\times10^7}{12\times10^5}$$

$$A = \frac{\cancel{4}\times\cancel{3}\times5 \times 10^7}{\cancel{4}\times\cancel{3} \times 10^5}$$

$$A = \frac{5 \times 10^7}{10^5}$$

$$A = 5 \times 10^7 \times 10^{-5} = 5\times10^2 = 500$$

Il est également possible (et souhaitable) de faire les deux simplifications en même temps.

Soit à effectuer : (Ecrire le résultat sous forme décimale)

$$C = \frac{24\times10^2\times3{,}5\times10^5}{8\times10^{-1}\times21\times10^4}$$

(RENNES - 1996)

Nous pouvons changer 3,5 et l'écrire sous la forme :

$3{,}5 = 35\times10^{-1}$

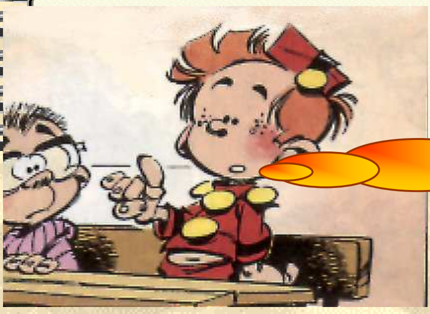
Puis nous regroupons les nombres significatifs et les puissances de dix.

Correction

$$C = \frac{24\times10^2\times35\times10^{-1}\times10^5}{8\times10^{-1}\times21\times10^4}$$

$$C = \frac{24\times35\times10^2\times10^{-1}\times10^5}{8\times21\times10^{-1}\times10^4}$$

$$C = \frac{24 \times 35 \times 10^{2} \times 10^{-1} \times 10^{5}}{8 \times 21 \times 10^{-1} \times 10^{4}}$$



On peut « couper » la fraction en deux , une partie significative et une partie puissances de 10.
On peut alors simplifier séparément ces deux parties.

$$C = \frac{\cancel{3} \times \cancel{8} \times \cancel{7} \times 5 \times 10^{2} \times \cancel{10^{-1}} \times 10^{5}}{\cancel{8} \times \cancel{3} \times \cancel{7} \times \cancel{10^{-1}} \times 10^{4}}$$

$$C = \frac{5 \times 10^{2} \times 10^{5}}{10^{4}}$$

$$C = \frac{5 \times 10^{7}}{10^{4}} = 5 \times 10^{7} \times 10^{-4} = 5 \times 10^{3}$$

ou

$$C = 5 \times 10^{2} \times 10^{5} \times 10^{-4} = 5 \times 10^{3}$$

$$C = 5\,000$$

Soit à effectuer : (Ecrire le résultat sous forme décimale)

$$D = \frac{3 \times 10^{5} \times 6 \times 10^{3}}{2 \times 10^{7} \times 4{,}5 \times 10^{2}}$$ (NANTES - 1999)

Correction

$$D = \frac{3 \times 10^{5} \times 6 \times 10^{3}}{2 \times 10^{7} \times 45 \times 10^{-1} \times 10^{2}}$$

$$D = \frac{3 \times 6 \times 10^{5} \times 10^{3}}{2 \times 45 \times 10^{7} \times 10^{-1} \times 10^{2}}$$

$$D = \frac{3 \times 2 \times 3 \times 10^{5} \times 10^{3}}{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 10^{7} \times 10^{-1} \times 10^{2}}$$

$$D = \frac{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{10^{8}}}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 2 \times \cancel{10^{8}}} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Soit à effectuer : (Ecrire le résultat sous forme décimale)

$$E = \frac{4\times(10^{-2})^{3}\times10^{2}}{16\times10^{-3}}$$

Correction

Nous avons $(10^{-2})^{3} = 10^{-2\times3} = 10^{-6}$

$(10^{-2})^{3} = 10^{-2}\times10^{-2}\times10^{-2} = 10^{-6}$

L'expression devient donc :

$$E = \frac{4\times10^{-6}\times10^{2}}{16\times10^{-3}}$$

$$E = \frac{4\times10^{-4}}{4\times4\times10^{-3}}$$

$$E = \frac{10^{-4}}{4\times10^{-3}}$$

$$E = \frac{10^{-4}\times10^{3}}{4} = \frac{10^{-1}}{4} = \frac{0,1}{4} = \frac{0,1\times10}{4\times10} = \frac{1}{40} = 0,025$$

ou

$$E = \frac{10^{-4}}{4\times10^{-3}}$$