

THEME 8

RESOLUTION D'UN PROBLEME A L'AIDE DES EQUATIONS

Plan pour la résolution d'un problème :

4 ETAPES

CHOIX DE L'INCONNUE

Peu importe le nom de l'inconnue ($x, y, z, n \dots$), l'important est ici de préciser ce que représente l'inconnue. Les unités, si elles existent, sont également à mentionner.

MATHEMATISATION

C'est la traduction du problème avec les éléments mathématiques. C'est l'étape la plus difficile. Il convient de lire le texte mot par mot. Le but est de déterminer une équation

RESOLUTION

Dans cette partie, il faut oublier ce que représente l'inconnue et faire une résolution purement mathématique.

RETOUR AU PROBLEME

La valeur déterminée est-elle plausible, cohérente, satisfaisante ... ?

Exercice 1 :

En ajoutant 4 au triple de ma note en mathématiques on obtient 40.
Quelle est ma note ?

► Choix de l'inconnue.

Soit x la note cherchée.

► Mathématisation :

En ajoutant 4 au triple de ma note en mathématiques on obtient 40

En ajoutant

+

4

+ 4

au triple de ma note
(la note est x)

$$3x + 4$$

on obtient 40

$$3x + 4 = 40$$

► Résolution :

L'équation à résoudre est :

$$3x + 4 = 40$$

Nous obtenons successivement :

$$3x = 40 - 4$$

$$3x = 36$$

$$x = \frac{36}{3} = 12$$

► Retour au problème :

La lettre x représente le nombre cherché.

Nous pouvons donc conclure : Le nombre cherché est 12.

► Vérification :

Le triple de cette note est 3×12 soit 36. En ajoutant 4, nous obtenons $36 + 4$, soit 40. C'est le résultat attendu !

La rédaction :

Soit x le nombre cherché.

$$3x + 4 = 40$$

$$3x = 40 - 4$$



$$3x = 36$$

$$x = \frac{36}{3} = 12$$

Le nombre cherché est 12.



Exercice 2 :

Trouvez trois nombres consécutifs dont la somme est 705.

Remarque : Dans l'exemple précédent, un seul nombre était inconnu. Ici, trois nombres sont à déterminer.

Dans l'absolu, il est impossible, à votre niveau, de découvrir trois nombres, sauf... si ces nombres sont dépendants.

Par exemple, si nous pouvions trouver le premier nombre. Le second serait alors égal à ce nombre augmenté de 1 et le troisième, égal au premier nombre augmenté de 2 !

► Choix de l'inconnue.

Soit n le premier nombre.

Remarque :

Pourquoi avoir changé de lettre pour l'inconnue.

Nous pouvons toujours appeler x le premier nombre.

Une inconnue sera pratiquement toujours représentée par la lettre x .

Cependant, par habitude, lorsque nous cherchons un nombre entier, souvent le nombre inconnu est représenté par la lettre n ; lorsque nous cherchons une durée (un temps), l'inconnue est plutôt représentée par la lettre t ; lorsque nous cherchons une masse , l'inconnue est souvent représentée par la lettre m ; lorsque nous cherchons une intensité (en Physique) , l'inconnue est souvent représentée par la lettre i , ...

Remarque :

Avant de mathématiser le problème, nous devons écrire, en fonction de l'inconnue choisie , ici n , les autres nombres intervenant dans le problème.

Le deuxième nombre est $n + 1$.

Le troisième nombre est $n + 2$.

► Mathématisation :

Les trois nombres sont n , $n + 1$ et $n + 2$. Nous savons que la somme est égale à 705. Nous avons (attention aux parenthèses inutiles ici, mais très utiles s'il y avait une différence)

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 705$$

► Résolution :

$$n + n + 1 + n + 2 = 705$$

$$3n + 3 = 705$$

$$3n = 705 - 3$$

$$3n = 702$$

Consécutif : (adjectif)

Généralement au pluriel

[En parlant de choses] Qui se suivent immédiatement

$$n = \frac{702}{3} = 234$$

► Retour au problème :

Le premier nombre est 234, le second $234 + 1$, soit 235 et le troisième est $234 + 2$ soit 236

Les trois nombres consécutifs sont 234, 235 et 236

La vérification est laissée au soin du lecteur.

La rédaction :

Soit n le premier nombre.

Le second nombre est $n + 1$

Le troisième nombre est $n + 2$

Nous avons

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 705$$

$$n + n + 1 + n + 2 = 705$$

$$3n + 3 = 705$$

$$3n = 705 - 3 = 702$$

$$n = \frac{702}{3} = 234$$

Les trois nombres sont 234, 235 et 236.

Remarque :

Une autre façon de résoudre le problème était de poser n le nombre du « milieu » (le deuxième nombre).

Le premier nombre était alors égal à $n - 1$ et le troisième nombre était $n + 1$.

L'équation devenait $(n - 1) + n + (n + 1) = 705$

Soit $n - 1 + n + n + 1 = 705$

Soit $3n = 705$

Soit $n = \frac{705}{3} = 235$

Le deuxième nombre étant égal à 235, le premier est 234 et le troisième est 236.



Exercice 3 :

Pierre, Paul et Jean ont ensemble 100 ans . Trouvez l'âge de chacun d'eux sachant que Paul a 10 ans de plus que Jean et que l'âge de Pierre est égal à la somme des âges de Paul et de Jean.

► Choix de l'inconnue.

Le personnage qui apparaît le plus souvent dans ce texte est Jean (ou Paul)

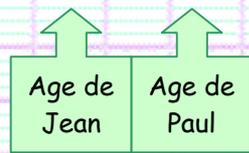
Soit x l'âge de Jean

Avant de mathématiser, déterminons les âges des autres personnages :

L'âge de Paul est (10 ans de plus que Jean) : $x + 10$

L'âge de Pierre est (somme des âges de Paul et de Jean) :

$$x + (x + 10) \text{ soit } x + x + 10, \text{ c'est à dire } 2x + 10$$



► Mathématisation :

Pierre, Paul et Jean ont ensemble 100 ans

Donc

$$(2x + 10) + (x + 10) + x = 100$$

► Résolution :

$$2x + 10 + x + 10 + x = 100$$

$$4x + 20 = 100$$

$$4x = 100 - 20$$

$$4x = 80$$

$$x = \frac{80}{4} = 20$$

► Retour au problème :

x représente l'âge de Jean, donc

Jean a 20 ans, Paul a $20 + 10$ soit 30 ans et Pierre a $2 \times 20 + 10$ soit 50 ans

Jean : 20 ans

Paul : 30 ans

Pierre : 50 ans

La vérification est laissée au soin du lecteur.

La rédaction :

Soit x l'âge de Jean.

L'âge de Paul est $x + 10$

L'âge de Pierre est $x + (x + 10)$ soit $2x + 10$

Nous avons

$$(2x + 10) + (x + 10) + x = 100$$

$$4x + 20 = 100$$

$$4x = 100 - 20$$

$$4x = 80$$

$$x = \frac{80}{4} = 20$$

Jean a 20 ans, Paul a $20 + 10$ soit 30 ans et Pierre a

$2 \times 20 + 10$ soit 50 ans



Exercice 4 :

Un homme âgé de 42 ans a trois enfants qui ont respectivement 14, 12 et 8 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il égal à la somme des âges de ses trois enfants ?

Remarque :

Les problèmes concernant les âges sont traités avec précaution. Rappelons que les personnes vieillissent de la même façon, c'est à dire que si une personne vieillit d'un certain nombre d'années, toutes les personnes vieillissent du même nombre d'années !!!

► Choix de l'inconnue.

« Dans combien d'années » : Soit x le nombre d'années cherché.

Utilisons un tableau pour afficher les âges de ces quatre personnes aujourd'hui et dans x années.

	Age actuel	Age dans x années
Père	42	$42 + x$
Enfant 1	14	$14 + x$
Enfant 2	12	$12 + x$
Enfant 3	8	$8 + x$

► Mathématisation :

Dans x années, l'âge du père sera égal à la somme des âges de ses trois enfants. Nous avons donc :

$$42 + x = (14 + x) + (12 + x) + (8 + x)$$

Diagram illustrating the equation: $42 + x = (14 + x) + (12 + x) + (8 + x)$. The terms are represented by boxes: "Age du père" (42 + x), "Age du 1^{er} enfant" (14 + x), "Age du 2^{ème} enfant" (12 + x), and "Age du 3^{ème} enfant" (8 + x). A red bracket underlines the sum of the three children's terms.

► Résolution :

$$42 + x = 14 + x + 12 + x + 8 + x$$

$$42 + x = 34 + 3x$$

$$42 - 34 = 3x - x$$

$$8 = 2x$$

$$\frac{8}{2} = x, \text{ soit } x = 4$$

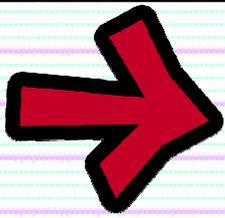
► Retour au problème :

Dans 4 ans, l'âge du père sera égal à la somme des âges de ses trois enfants.

► Vérification :

	Age actuel	Age dans 4 années
Père	42	$42 + 4 = 46$
Enfant 1	14	$14 + 4 = 18$
Enfant 2	12	$12 + 4 = 16$
Enfant 3	8	$8 + 4 = 12$

Somme des âges
des trois enfants :
 $18 + 16 + 12 = 46$



Exercice 5 :

Un père a 42 ans, son fils a 10 ans et sa fille 16 ans.

a) Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le triple de l'âge du fils ?

b) Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le triple de l'âge de la fille ?

a) Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le triple de l'âge du fils ?

► Choix de l'inconnue.

« Dans combien d'années » : Soit x le nombre d'années cherché.

Comme précédemment, dressons un tableau.

	Age actuel	Age dans x années
Père	42	$42 + x$
Fils	10	$10 + x$

► Mathématisation :

Dans x années, l'âge du père sera égal au triple de l'âge de son fils. Nous avons donc :

$$42 + x = 3(10 + x)$$

► Résolution :

$$42 + x = 30 + 3x$$

$$42 - 30 = 3x - x$$

$$12 = 2x$$

$$\frac{12}{2} = x, \text{ soit } x = 6$$

► Retour au problème :

Dans 4 ans, l'âge du père sera égal au triple de l'âge de son fils.

► Vérification :

	Age actuel	Age dans 6 années
Père	42	$42 + 6 = 48$
Fils	10	$10 + 6 = 16$

Nous constatons que le triple de l'âge du fils, soit 16×3 , c'est à dire 48 sera égal à l'âge du père !

b) Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le triple de l'âge de la fille ?

► Choix de l'inconnue.

« Dans combien d'années » : Soit x le nombre d'années cherché.

Comme précédemment, dressons un tableau.

	Age actuel	Age dans x années
Père	42	$42 + x$
Fille	16	$16 + x$

► Mathématisation :

Dans x années, l'âge du père sera égal au triple de l'âge de sa fille. Nous avons donc :

$$42 + x = 3(16 + x)$$

► Résolution :

$$42 + x = 48 + 3x$$

$$42 - 48 = 3x - x$$

$$-6 = 2x$$

Ne pas s'occuper, pour l'instant, du fait que x représente un nombre (positif) d'années !

$$\frac{-6}{2} = x, \text{ soit } x = -3$$

► Retour au problème :

La réponse, qui concerne un nombre d'années, est négatif.

Cette solution n'est pas cohérente. Nous pouvons donc conclure que l'âge du père ne sera, à partir d'aujourd'hui, jamais égal au triple de l'âge de sa fille.

Nous pouvons cependant apporter une autre réponse.

Il y a 3 ans (-3 est négatif), l'âge du père était égal au triple de l'âge de sa fille.

► Vérification :

	Age actuel	Il y a 3 ans
Père	42	42 - 3 = 39
Fille	16	16 - 3 = 13

Nous constatons que le triple de l'âge de la fille, soit 13×3 , c'est à dire 39 était égal à l'âge du père !



Exercice 6 :

Nicolas a eu 11 et 15 aux deux premiers contrôles . Le troisième et dernier contrôle compte double . Il n'a pas voulu dire sa note à Sophie , mais il sait qu'il a 12 de moyenne.

Quelle est la note de Nicolas au dernier contrôle ?

► Choix de l'inconnue.

La question nous permet d'écrire rapidement :

Soit x la note de Nicolas au dernier contrôle.

	1 ^{er} contrôle	2 ^{ème} contrôle	3 ^{ème} contrôle
Note	11	15	x
Coefficient	1	1	2

Le dernier contrôle compte double. Cela signifie que la note de ce contrôle apparaîtra 2 fois dans le calcul de la moyenne. C'est comme s'il y avait, au lieu du troisième contrôle, deux contrôles avec la même note x .

► Mathématisation :

La moyenne de Nicolas est 12. Nous avons donc :

$$\frac{11 + 15 + x + x}{4} = 12$$

Il n'y a que 3 devoirs, mais comme le troisième et dernier devoir compte double, nous devons considérer 4 notes.

► Résolution :

$$11 + 15 + x + x = 4 \times 12$$

$$26 + 2x = 48$$

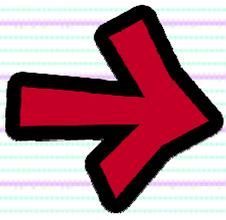
$$2x = 48 - 26$$

$$2x = 22$$

$$x = \frac{22}{2} = 11$$

► Retour au problème :

La note du dernier devoir de Nicolas est 11



Exercice 7 :

Un Cadet de Gascogne dit à ses compagnons :

" J'ai dépensé trois écus de plus que le cinquième de ma bourse et il me reste 6 écus de plus que la moitié de ce que j'avais en entrant ici."

Combien ce Cadet avait-il en entrant ?

► Choix de l'inconnue.

Soit x la somme possédée par ce Cadet de Gascogne en entrant.

► Mathématisation :

▷ Cherchons sa dépense :

« trois écus de plus que le cinquième de ma bourse »

Le cinquième de sa bourse est représenté par $\frac{1}{5}x$

Mais il a dépensé trois écus de plus, donc sa dépense est : $\frac{1}{5}x + 3$

▷ Cherchons combien il lui reste :

« 6 écus de plus que la moitié de ce que j'avais en entrant ici »

Le moitié de ce qu'il avait en entrant est représenté par $\frac{1}{2}x$

Mais il lui reste six écus de plus. Il lui reste donc : $\frac{1}{2}x + 6$

▷ Conclusion :

Ce qu'il avait en entrant est égal à la somme de ce qu'il a dépensé et de ce qu'il lui reste . Nous avons donc l'équation suivante :

$$x = \left(\frac{1}{5}x + 3\right) + \left(\frac{1}{2}x + 6\right)$$

► Résolution :

$$x = \frac{1}{5}x + 3 + \frac{1}{2}x + 6$$

$$x - \frac{1}{5}x - \frac{1}{2}x = 3 + 6$$

$$\frac{10}{10}x - \frac{2}{10}x - \frac{5}{10}x = 9$$

$$\frac{3}{10}x = 9$$

$$x = \frac{9}{\frac{3}{10}} = 9 \times \frac{10}{3} = \frac{9}{1} \times 9 \times \frac{10}{3} = \frac{9 \times 10}{3} = \frac{3 \times 3 \times 10}{3} = 30$$

► Retour au problème :

Le Cadet de Gascogne avait 30 écus en rentrant.

► Vérification :

Dépense : trois écus de plus que le cinquième de ma bourse

$$\frac{1}{5} \times 30 = \frac{30}{5} = 6$$

$$6 + 3 = 9$$

Reste : « 6 écus de plus que la moitié de ce que j'avais en entrant ici »

$$\frac{1}{2} \times 30 = \frac{30}{2} = 15$$



$$15 + 6 = 21$$

$$\text{Total : } 9 + 21 = 30$$



Exercice 8 :

Un troupeau est composé de chameaux et de dromadaires. On compte 180 têtes et 304 bosses. Combien y a-t-il d'animaux de chaque espèce ?

► Choix de l'inconnue.

Il y a ici deux inconnues : le nombre de chameaux et le nombre de dromadaires. Soit x le nombre de chameaux (C'est un choix - x peut également représenter le nombre de dromadaires).

« On compte 180 têtes » signifie que le nombre total d'animaux est 180 (un animal a une et une seule tête !)

Le nombre de dromadaires est alors de $180 - x$

► Mathématisation :

Le nombre de bosses appartenant aux chameaux est égal au double du nombre de chameaux (S'il y a 1 chameau , il y a 2×1 bosses. S'il y a 5 chameaux, il y a 2×5 bosses . S'il y a x chameaux, le nombre de bosses est $2x$)

Les chameaux présentent donc $2x$ bosses .

Chaque dromadaire a une bosse . Donc le nombre de bosses, pour les dromadaires est égal à $180 - x$.

Au total , les chameaux et les dromadaires ont $2x + (180 - x)$ bosses.

Nous avons donc :

$$2x + (180 - x) = 304$$

► Résolution :

$$2x + 180 - x = 304$$

$$x + 180 = 304$$

$$x = 304 - 180$$

$$x = 124$$

► Retour au problème :

Il y a 124 chameaux et $180 - 124$, soit 56 dromadaires.

► Vérification :

Nombre total d'animaux (de têtes)

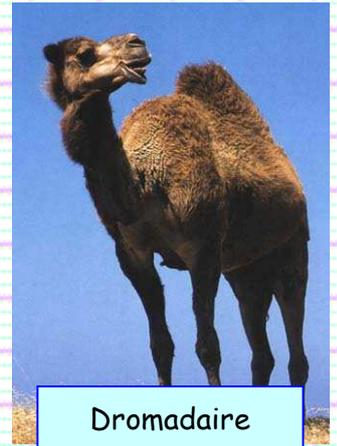
$$124 + 56 = 180$$

Nombre total de bosses :

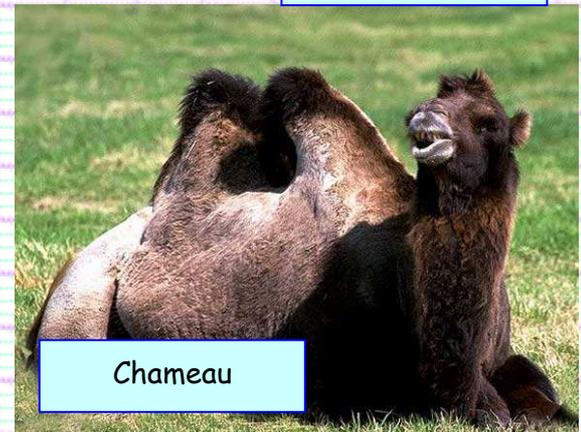
$$\text{Chameaux (2 bosses) : } 2 \times 124 = 248$$

$$\text{Dromadaires (1 bosse) : } 56$$

$$\text{Total } 248 + 56 = 304$$



Dromadaire



Chameau

Un chameau a deux bosses et un dromadaire a une bosse.

