THEME 8

COMMENT UTILISER LA PROPORTIONNALITE ou RECHERCHE DE LA QUATRIEME PROPORTIONNELLE

Utilisation dans un exemple :

Cinq objets coûtent 2,5 €. Quel est le prix de 7 objets ?

Nous savons que le prix des objets est proportionnel au nombre d'objets.

➢ Méthode 1 : Recherche du coefficient de proportionnalité ($5^{ème}$ et $4^{ème}$)

Le tableau de proportionnalité est le suivant :

Nombre d'objets	5	7
Prix (en €)	2,5	?

Ce quatrième nombre ? que nous désirons connaître (nous connaissons, dans ce tableau de proportionnalité, trois nombres, 5 ; 2,5 et 7) s'appelle la quatrième proportionnelle.

Comme ce tableau est un tableau de proportionnalité, les nombres de la seconde ligne sont obtenus en multipliant les nombres de la première ligne par un même nombre appelé **coefficient de proportionnalité.**
Il suffit donc de déterminer ce coefficient de proportionnalité.

Nombre d'objets	5	7
Prix (en €)	2,5	?

?

Le coefficient est égal à : $\frac{2,5}{5}$ soit 0,5.

Nombre d'objets	5	7
Prix (en €)	2,5	?

0,5

Par conséquent, la valeur x cherchée est égale au produit de 7 par 0,5 , ce qui donne 3,5.
Le prix de 7 objets est donc de 3,5 €.

➢ Méthode 2 : Règle de trois ($5^{ème}$ et $4^{ème}$)

C'est un tableau de proportionnalité "caché".
Reprenons le même exemple que précédemment :

Cinq objets coûtent 2,5 €. Quel est le prix de 7 objets ?

Il serait facile de répondre à cette question si l'on nous demandait de déterminer le prix de 10 objets, ou de 15 objets. Il suffirait de multiplier le prix des 5 objets, c'est à dire 2,5 €, par deux (pour 10 objets) ou par trois (pour 15 objets)
Mais comment "passer" de 5 à 7 ?
Le " truc " est de chercher le prix d'un objet. (Cette méthode s'appelle le passage à l'unité)
Nous avons donc :

	5 objets	coûtent	2,5 €	
: 5 ↓				↓ : 5
	1 objet	coûte	2,5 : 5 , soit 0,5 €	
x 7 ↓				↓ x 7
	7 objets	coûtent	7 X 0,5 , soit **3,5 €**	

Ce nombre est le coefficient de proportionnalité déterminé dans la méthode précédente.

Nous pouvons donc conclure
Le prix de 7 objets est donc de 3,5 €.
Remarque :

: 5 x 7

5	1	7
2,5	0,5	3,5

: 5 x 7

➢ Méthode 3 : Utilisation du « produit en croix » (4ème)

Le prix des objets est proportionnel au nombre d'objets. Le tableau suivant est donc un tableau de proportionnalité.

Nombre d'objets	5	7
Prix (en €)	2,5	?

Colonne 1 : Cinq objets coûtent 2,5 €. Nous inscrivons donc 5 dans la ligne correspondant au nombre d'objets et 2,5 dans la ligne correspondant au prix.

Colonne 2 : Nous cherchons à déterminer le prix de 7 objets. Nous inscrivons donc 7 dans la ligne correspondant au nombre d'objets. Le but de l'exercice est de déterminer le nombre qui doit remplacer le point d'interrogation.

Pour pouvoir effectuer le calcul, nous remplacerons le point d'interrogation par la lettre x.

Nombre d'objets	5	7
Prix (en €)	2,5	x

Pour déterminer ce nombre, il suffit d’employer « le produit en croix ».
Nous avons :

Nombre d'objets	5	7
Prix (en €)	2,5	x

5 . x = 2,5 . 7 (le point représente ici le signe de multiplication pour éviter toute confusion avec la lettre x)

soit $$x = \frac{2{,}5\ .\ 7}{5} = \frac{17{,}5}{5} = 3{,}5$$

Le prix de 7 objets est donc de 3,5 €.

Remarque : Pourquoi le produit en croix ? (plus difficile)

Considérons une égalité fractionnaire du type $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Nous dirons que ces deux rapports forment une proportion.
Une telle égalité est équivalente à $a \times d = b \times c$ (voir cours concernant les fractions)

> **Propriété :** (b et d non nuls)
>
> Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $a \times d = b \times c$
>
> Et inversement :
>
> Si $a \times d = b \times c$, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Cette propriété est souvent connue sous le nom de " produit en croix ".

Exemple 1 : Les deux fractions $\frac{4}{6}$ et $\frac{6}{9}$ sont égales.

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$$

Il suffit pour cela de simplifier les deux fractions : $\frac{4}{6} = \frac{\cancel{2} \times 2}{\cancel{2} \times 3} = \frac{2}{3}$ et $\frac{6}{9} = \frac{2 \times \cancel{3}}{3 \times \cancel{3}} = \frac{2}{3}$

Nous constatons également que $4 \times 9 = 6 \times 6$ (produit en croix)

Exemple 2 : Les deux fractions $\frac{1391}{1177}$ et $\frac{169}{143}$ sont-elles égales ?

Nous pouvons chercher à les simplifier (si elles sont simplifiables) mais cette recherche risque d’être longue.

Cherchons la valeur des deux « produits en croix ». $\frac{1391}{1177}$ $\frac{169}{143}$

Nous avons $1391 \times 143 = 198913$ et $1177 \times 1693 = 198913$.

Il y a égalité, donc les deux fractions sont égales : $\frac{1391}{1177} = \frac{169}{143}$

Revenons au tableau de proportionnalité.

Ligne 1	a	a'
Ligne 2	b	b'

Ce tableau est un tableau de proportionnalité si les termes de la seconde ligne s'obtiennent en multipliant ceux la première ligne par un nombre (*appelé coefficient de proportionnalité*).
Nous pouvons donc dire qu'il y a proportionnalité si les quotients obtenus pour tous les couples de nombres situés dans une même colonne sont égaux.

Il y a donc proportionnalité si $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$ et par suite si $b \times a' = b' \times a$

Ligne 1	a	a'
Ligne 2	b	b'

Remarque 1 : (Passage à l'unité ou non)

7 objets coûtent 10 euros. Quel est le prix de 21 objets ?

Utilisons la règle de trois. Nous devons donc chercher le prix d'un objet pour obtenir ensuite le prix des 21 objets. Nous pouvons cependant ici procéder différemment.
Nous avons :

	14 objets	coûtent	10 €	
↓ : 2				↓ : 2
	7 objets	coûtent	10 : 2 , soit 5 €	
↓ x 3				↓ x 3
	21 objets	coûtent	5 × 3 , soit **15 €**	

Remarque 2 : (Coefficient de proportionnalité non décimal)

15 objets coûtent 50 euros. Quel est le prix de 21 objets ?

▶ ***Méthode 1 :*** Recherche du coefficient de proportionnalité (5ème et 4ème)

Nombre d'objets	15	21
Prix (en €)	50	x

Le coefficient de proportionnalité est : $\frac{50}{15}$. Ce nombre n'est pas un décimal (la division ne tombe pas juste).
Nous ne devons pas utiliser une valeur approchée (sauf cas particulier en classe de Cinquième – la division par une fraction étant à ce stade inconnue) mais utiliser l'écriture fractionnaire (éventuellement simplifiée) de ce coefficient.
Le coefficient de proportionnalité est donc :

$$\frac{50}{15} = \frac{5 \times 10}{5 \times 3} = \frac{10}{3}$$

Nombre d'objets	15	21
Prix (en €)	50	x

$\times \frac{10}{3}$

Le prix de 21 objets est donc :

$$21 \times \frac{10}{3} = \frac{21}{1} \times \frac{10}{3} = \frac{21 \times 10}{1 \times 3} = \frac{3 \times 7 \times 10}{1 \times 3} = \frac{7 \times 10}{1} = 70$$ soit 70 euros

Si nous avions utilisé comme coefficient de proportionnalité une valeur approchée, soit par exemple 3,3, nous aurions obtenu comme résultat 69,3 (euros) !

▶ ***Méthode 2 :*** Règle de trois (5ème et 4ème)

	15 objets	coûtent	50 €	
: 15 ↓				↓ : 15
	1 objet	coûte	$\frac{50}{15}$, soit $\frac{10}{3}$ €	
× 21 ↓				↓ × 21
	21 objets	coûtent	$21\times\frac{10}{3}=\frac{21}{1}\times\frac{10}{3}=\frac{21\times10}{1\times3}=\frac{3\times7\times10}{1\times3}=\frac{7\times10}{1}=70$ €	

Ne pas prendre de valeur approchée de ce résultat !

▶ *Méthode 3 :* Produit en croix (4ème)

Nombre d'objets	15	21
Prix (en €)	50	x

Nous obtenons :

$$15\times x=50\times21$$

Par suite $x=\frac{50\times21}{15}=\frac{5\times10\times3\times7}{3\times5}=10\times7=70$ soit 70 euros

Cette méthode évite le problème des valeurs approchées que nous pourrions utiliser dans les deux méthodes précédentes.

Exercice corrigé :

J'achète 1,5 kg de cerises pour 3,6 euros

a)Combien aurais-je payé pour 2,5 kg ?

b)Ai-je assez avec un billet de 10 euros pour payer une cagette de 4 kg ?

▶ *Méthode 1 :* (5ème et bien sûr 4ème)

a) Prix de 2,5 kg de cerises :

Masse de cerises (en kg)	1,5	2,5
Prix (en €)	3,6	x

× 2,4

Toujours préciser les unités

Le coefficient de proportionnalité est $\frac{3,6}{1,5}$ soit 2,4 (rappelons que ce nombre représente le prix unitaire, c'est-à-dire le prix d'un kilogramme de cerises)

Le prix de 2,5 kg de cerises est donc :

$2,5\times2,4$ soit 6 euros.

b) Prix de 4 kg de cerises :

Le prix de 4 kg de cerises est $4 \times 2,4$ soit 9,6 euros.

Avec 10 euros, nous pouvons donc acheter 4 kg de cerises.

Remarque : Il est possible également de rechercher la masse de cerises que nous pouvons acheter avec 10 euros. (méthode plus longue)

Masse de cerises (en kg)	1,5	2,5	?
Prix (en €)	3,6	6	10

~~× 2,4~~ : 2,4

La masse de cerises que nous pouvons obtenir avec 10 euros est :

$$10 : 2,4 = \frac{10}{2,4} \approx 4,16 \text{ (kg)}$$

Donc, avec 10 euros, nous pouvons donc acheter 4 kg de cerises.

▶ *Méthode 2 :* ($4^{\text{ème}}$)

a) Prix de 2,5 kg de cerises :

Masse de cerises (en kg)	1,5	2,5
Prix (en €)	3,6	x

Nous avons : $1,5 \times x = 3,6 \times 2,5$

Soit $x = \frac{3,6 \times 2,5}{1,5} = \frac{9}{1,5} = 6$ Le prix de 2,5 kg de cerises est de 6 euros

b) Prix de 4 kg de cerises :

Masse de cerises (en kg)	1,5	4
Prix (en €)	3,6	y

Nous avons : $1,5 \times y = 3,6 \times 4$

$$y = \frac{3,6 \times 4}{1,5} = \frac{14,4}{1,5} = 9,6$$

Avec 10 euros, nous pouvons donc acheter 4 kg de cerises.

Remarque : Il est possible également de rechercher la masse de cerises que nous pouvons acheter avec 10 euros.

Masse de cerises (en kg)	1,5	z
Prix (en €)	3,6	10

Nous avons : $3,6 \times z = 1,5 \times 10$

La masse de cerises que nous pouvons obtenir avec 10 euros est :

$$10 : 2,4 = \frac{10}{2,4} \approx 4,16 \text{ (kg)}$$

$$z = \frac{1,5 \times 10}{3,6} = \frac{15}{3,6} \approx 4,16$$

Donc, avec 10 euros, nous pouvons donc acheter 4 kg de cerises.