Démonstration d'Euclide du théorème de Pythagore

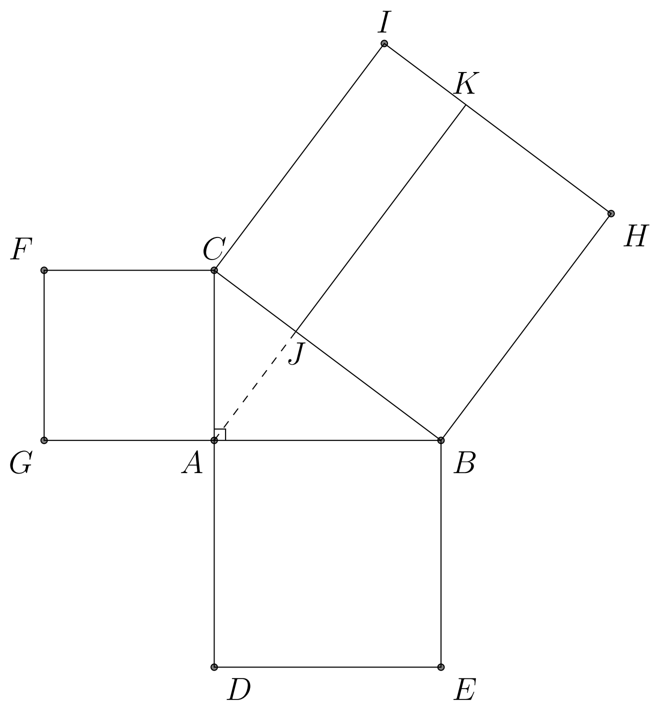
http://www.mathweb.fr

Stéphane PASQUET

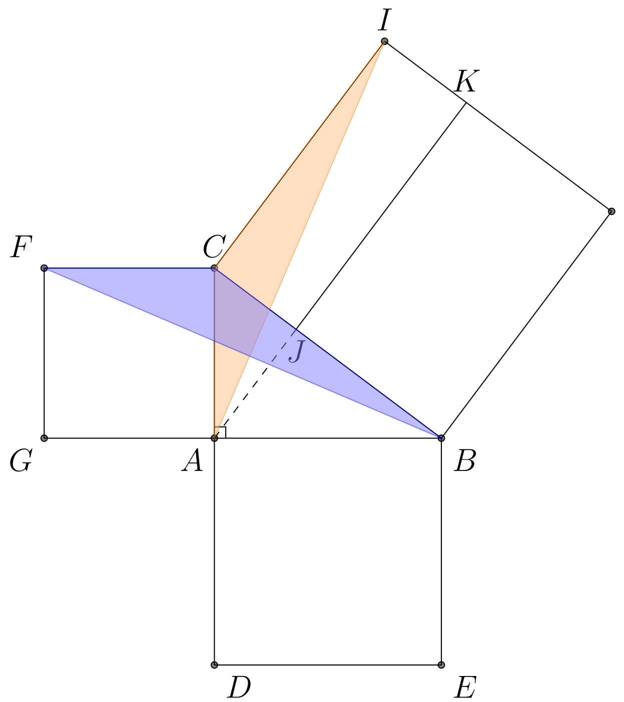
Enoncé du théorème de Pythagore

Soit ABC un triangle rectangle en A. Alors, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

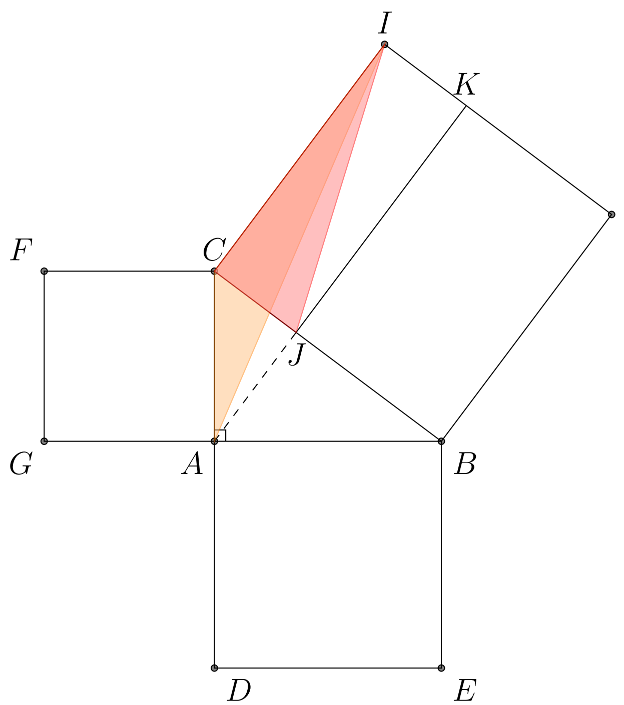
Nous allons voir ici la démonstration qu'a faite Euclide.



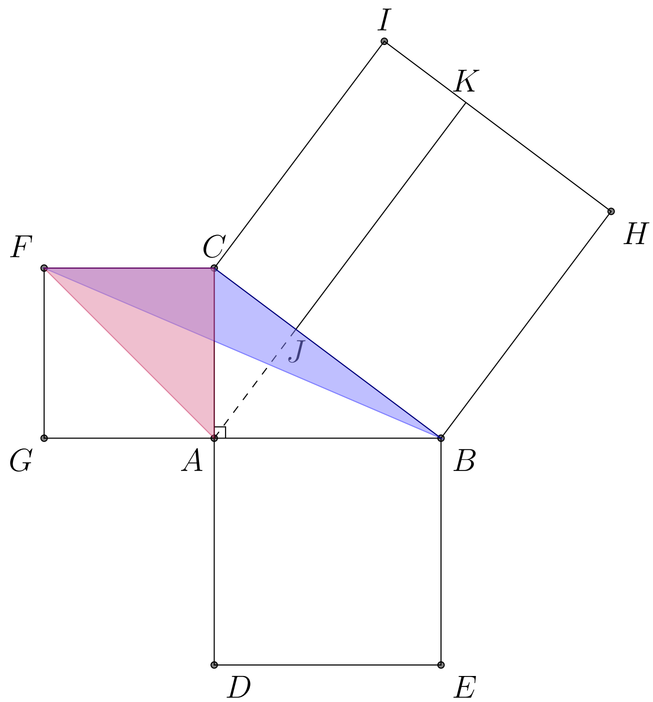
On mène par le point A la parallèle à (IC). Elle coupe (BC) et (IH) en respectivement J et K.



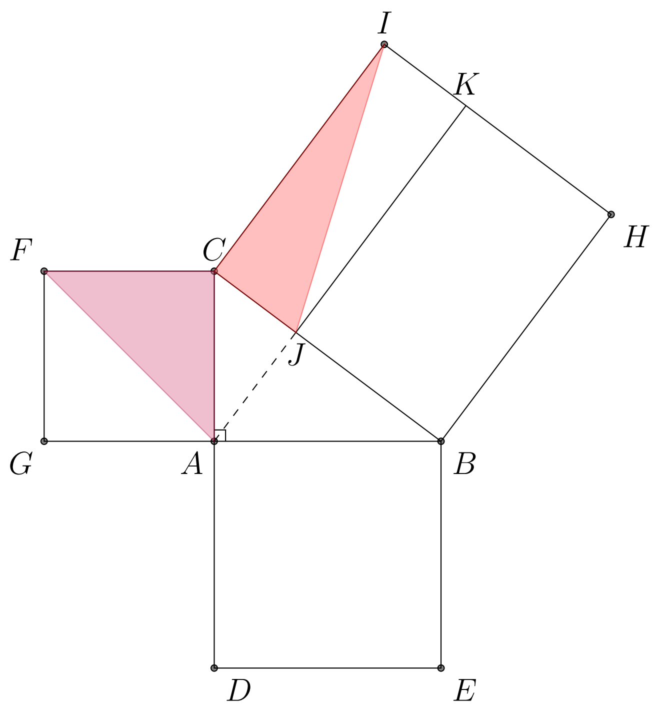
On fait subir au triangle ACI une rotation de centre C et d'angle $-90°$: on obtient le triangle FCB (ils sont en effet isométriques car FC = CA et CB = CI).



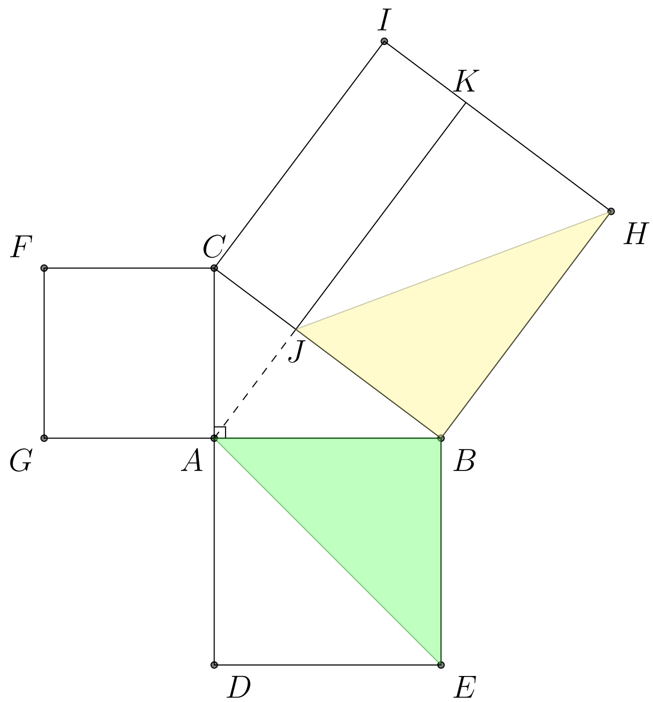
Or, le triangle ACI a la même aire que le triangle JCI (car leurs hauteurs respectives issues des sommets A et J, relatives toutes les deux au côté (CI), sont égales).



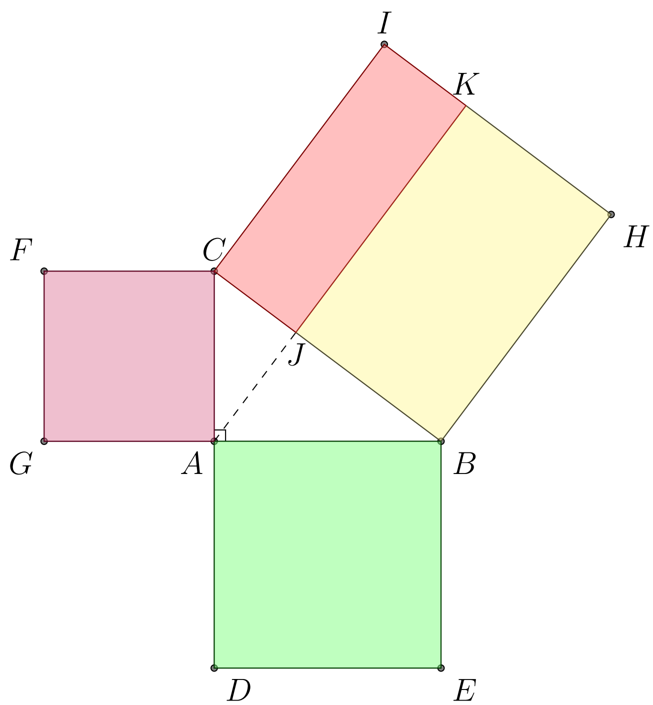
De même, le triangle CFB a la même aire que le triangle CFA (car leurs hauteurs respectives issues des sommets A et B, relatives toutes les deux au côté (CF), sont égales).



Ainsi, le triangle CJI a la même aire que le triangle CFA. Ce qui signifie que CJKI et ACFG ont la même aire.



De même, le triangle BEA a la même aire que le triangle BHJ. Ce qui signifie que ABED et BHKJ ont la même aire.



Ainsi, l'aire de BCIH est égale à la somme de l'aire de ACFG et de l'aire de ABED.
Ce qui se traduit de façon algébrique sous la forme :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$