Proportionnalité

Grandeurs proportionnelles

Les valeurs de l'une s'obtiennent en **multipliant** (ou en **divisant**) les valeurs correspondantes de l'autre par un **même nombre** (non nul) appelé **coefficient de proportionnalité**.

Méthode : pour vérifier rapidement une situation de proportionnalité :

« Pour le double de la grandeur A,
a-t-on le double de la grandeur B ? »

(« tant de fois plus » ou « tant de fois moins »)

Exemples :

- Si 3 kg de fraises coûtent 17 €, alors 12 kg couteront 68 €.
- La pointure d'un individu dépend (ou est fonction) de son âge, mais **n'est pas proportionnelle** à son âge.

Echelles

- **Reproduction** : plan, carte, photographie, dessin, maquette…
- **Échelle** d'une reproduction $= \dfrac{\text{distance représentée}}{\text{distance réelle}}$

Les distances doivent être exprimées dans la **même unité**. Penser à choisir une unité adaptée à la situation étudiée (km, m ou cm…).

Exemples :

- Sur une carte à l'échelle 1 : 4 000, les longueurs réelles sont 4 000 fois plus grandes que celles représentées sur la carte.
  - 1 cm sur la carte représente 4 000 cm (40 m) dans la réalité.
  - 100 m (10 000 cm) dans la réalité ⍰ 2,5 cm sur la carte.
- A l'échelle $\times$ 5, une coccinelle qui mesure 8 mm = 0,8 cm en réalité va mesurer $0{,}8\ cm \times 5 = 4\ cm$ sur une photographie d'un livre de SVT.

Calculer une quatrième proportionnelle

■ Méthode 1. Passage à l'unité.

8 balles de ping-pong toutes identiques ont pour masse 21,6 g.
Quelle est la masse de 6 de ces balles ?

Nombre de balles	8	1	6
Masse (en g)	21,6	2,7	…

Comme $\frac{21{,}6}{8} = 2{,}7$
Donc une balle a pour masse 2,7 g
Et $2{,}7\ g \times 6 = 16{,}2\ g$
Alors **la masse de 6 balles** est de $\mathbf{16{,}2\ g}$

■ Méthode 2. Coefficient de proportionnalité.

12 photocopies en couleurs coûtent 5,40 €. Le prix est proportionnel au nombre de photocopies.
Quel est le prix à payer pour 30 photocopies ?

Nombre de photocopies	12	30
Prix (en €)	5,40	…

$\times ???$

On cherche le coefficient de proportionnalité (la flèche pointe vers le numérateur du coefficient de proportionnalité) : $\frac{5{,}4}{12} = 0{,}45$
Comme $0{,}45 \times 30 = \mathbf{13{,}50}$
Alors les 30 photocopies coûtent 13,50 €

■ Méthode 3. Égalité des produits en croix ou la règle de trois.

Thomas a confectionné un gâteau de 400 g pour lequel il a utilisé 150 g de farine.
Quelle quantité de farine faut-il pour faire le même gâteau de 300 g ?

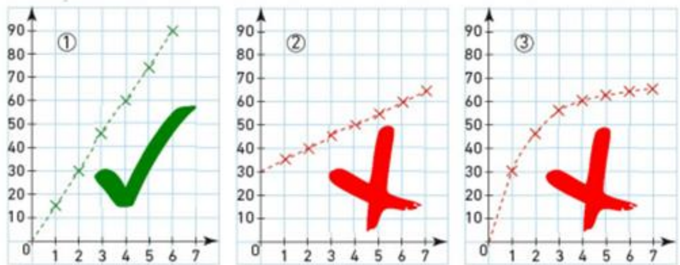
Masse de farine (en g)	150	…
Masse du gâteau obtenu (en g)	400	300

$$m = \frac{\mathbf{300 \times 150}}{\mathbf{400}} = 112{,}5.$$

Pour **un gâteau de 300 g, on utilise 112,5 g de farine.**

Représentation graphique

- Dans un repère, toute situation de **proportionnalité** entre **deux grandeurs** se représente graphiquement par des **points alignés** avec l'**origine du repère**.
- Dans un repère, tout graphique dont les points sont **alignés avec l'origine du repère** représente une situation de **proportionnalité** entre **deux grandeurs**.



- Le graphique 1 représente une situation de proportionnalité car les points sont alignés avec l'origine du repère. (représentation d'une fonction linéaire)
- Le graphique 2 ne représente pas une situation de proportionnalité car les points ne sont pas alignés avec l'origine du repère.
- Le graphique 3 ne représente pas une situation de proportionnalité car les points ne sont pas alignés.

Pourcentage et Ratio

Pourcentage

Pour**CENT**age : Situation de proportionnalité où la valeur de référence est **100** :

$$\boldsymbol{t}\,\% = \frac{\boldsymbol{t}}{\mathbf{100}}$$

- $\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\,\%$
- $\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\,\%$
- $\frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\,\%$
- $\frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\,\%$
- $\frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\,\%$
- $\frac{1}{20} = 0{,}05 = 5\,\%$
- $\frac{1}{25} = 0{,}04 = 4\,\%$
- $\frac{1}{50} = 0{,}02 = 2\,\%$
- $1 = 100\,\%$ (total)

Exemple : Lors d'une élection, un candidat a recueilli **65 %** des voix signifie que sur **100** électeurs, **65** personnes ont voté pour lui.

Appliquer un pourcentage

Il faut calculer l'**effectif** correspondant au pourcentage donné $p > 0$

$$\boldsymbol{p}\,\%\ de\ A = \frac{\boldsymbol{p}}{\mathbf{100}} \times \boldsymbol{A}$$

Exemple : 15 % de fruits dans un yaourt de 200 g.

$$\frac{15}{100} \times 200 = 0{,}15 \times 200 = 30$$

Donc il y a **30 g** de fruits dans un yaourt de 200g

Déterminer un pourcentage

C'est calculer une **proportion** (écriture fractionnaire) **de dénominateur 100**.

Exemple : Sur **300** candidats à un concours, **126** ont été admis

$$\frac{126}{300} = 0{,}42 = \frac{42}{100}$$

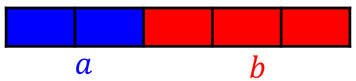
Donc il y a eu **42 %** de reçus à ce concours

Ratio de deux nombres

a, b désignent des nombres positifs.

$\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont dans le **ratio** $\mathbf{2}$: $\mathbf{3}$ signifie que :

- $\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{3}}$
- $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$
- $\boldsymbol{a}$ représente les $\frac{2}{5}$ du total et $\boldsymbol{b}$ les $\frac{3}{5}$



Exemple : Tic et Tac se partagent 200 € ainsi : 75 € pour Tic et 125 € pour Tac. Dans quel ratio simplifié s'effectue le partage ?

Comme $\frac{75}{125} = \frac{3}{5}$

Alors **75** et **125** sont dans le ratio **3 : 5**

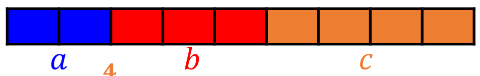
Et $\frac{75}{3} = \frac{125}{5} = 25$

Ratio de trois nombres

a, b , c désignent des nombre positifs.

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont dans le **ratio** $\mathbf{2}$: $\mathbf{3}$: $\mathbf{4}$ signifie que :

- $\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{3}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{4}}$
- $\boldsymbol{a}$ représente les $\frac{2}{9}$ du total, $\boldsymbol{b}$ les $\frac{3}{9}$ et $\boldsymbol{c}$ les $\frac{4}{9}$



Exemple : Pierre, Sonia et Claire se partagent 245 bonbons selon le ratio 2:1:4 . Combien de bonbons recevra chacun ?

Le partage s'effectue selon le ratio 2:1:4 cela signifie que lorsque Pierre reçoit 2 bonbons, Sonia en reçoit 1 et Claire en reçoit 4.

Méthode :

- On additionne les trois nombres du ratio : 2+1+4 = 7
- On divise le nombre total de bonbons par le nombre obtenu : 245÷7 = 35
- Pierre aura 2×35 = 70 bonbons , Sonia en aura 35 et Claire en aura 4×35 = 140 bonbons
- Vérification : 70 + 35 + 140 = 245