DS 4 - 4 AVRIL 2019

Durée : 55 min **AVEC Calculatrice**

NOM : **Prénom :**

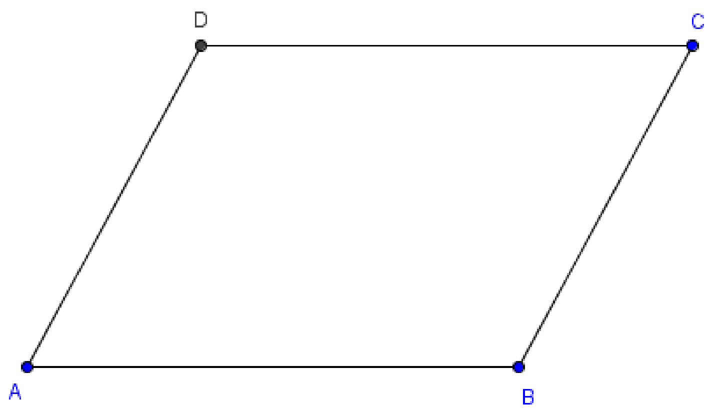
Bilan	Géométrie	Algèbre	Fonction
/ 20	/ 7	/ 5	/ 8

GEOMETRIE - 7 POINTS -

Soit $ABCD$ un parallélogramme ; I le milieu de $[AB]$ et E le point tel que $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$.

Il s'agit de montrer que les points A, E et C sont alignés.

Pour commencer, complétez la figure ci-dessous (on laissera les traits de constructions) :



Première méthode *(sans coordonnées)*

1) Exprimer $\overrightarrow{DI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2) Montrer que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
3) Prouver que les points A, E et C sont alignés.

Seconde méthode *(avec coordonnées)*

Pour cela on utilise le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\,)$.

1) Donner les coordonnées des points A, B, C et D. (sans justifier)
2) Déterminer les coordonnées des points I et E.
3) Conclure.

ALGEBRE - 5 POINTS -

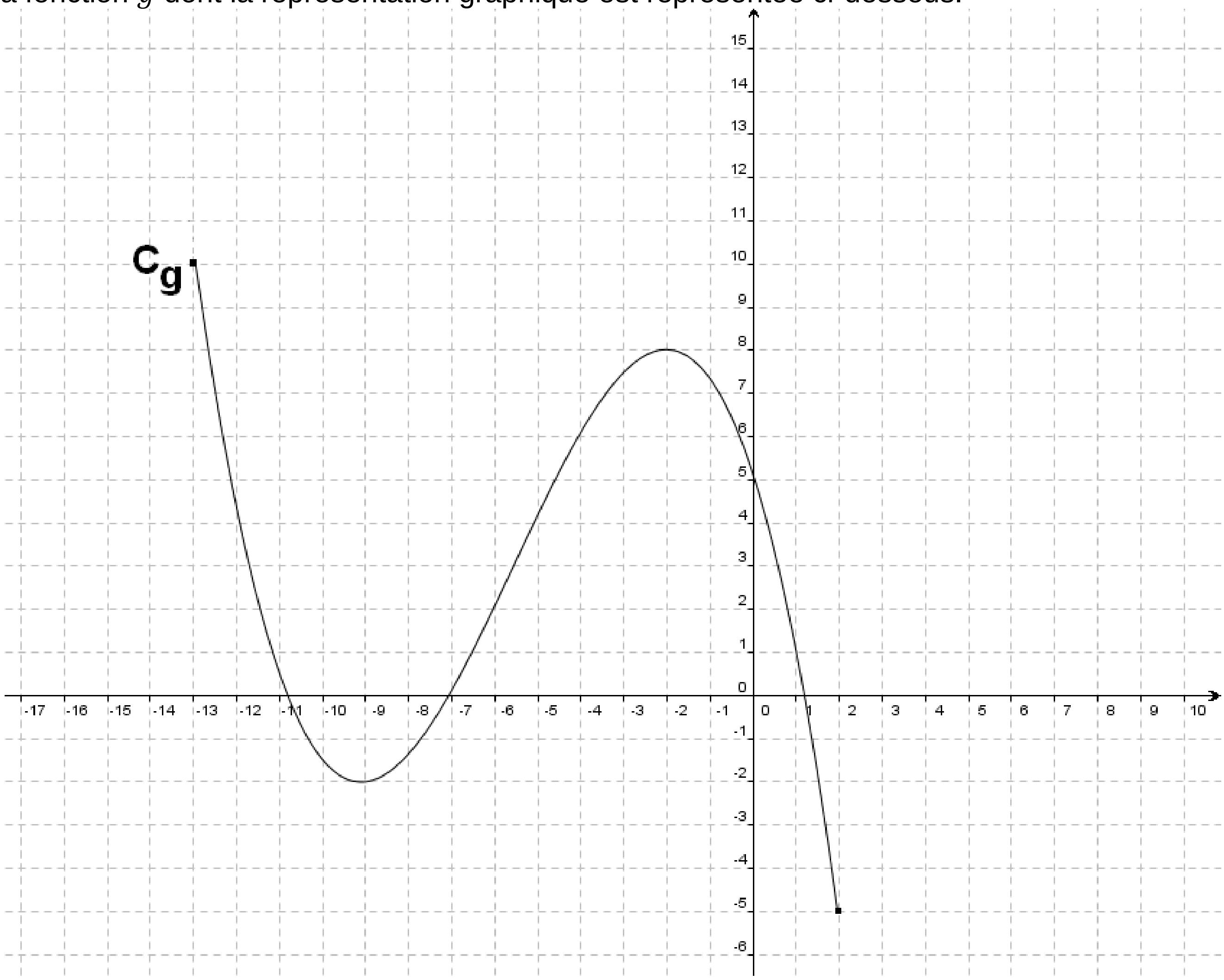
Résoudre l'équation **et** les inéquations suivantes :

a) $\frac{x+3}{x-1} + 2 = 0$ b) $(2x-2)(2x+4) \leq 0$ c) $\frac{x+2}{2-x} \leq 3$

Fonctions - 8 points -

Partie A **- 2,5 points -** **(sans justifier)**

Soit la fonction g dont la représentation graphique est représentée ci-dessous.



1) Quel est l'ensemble de définition de la de la fonction g ?

2) Quelle est l'image de -4 par la fonction g ?

3) Quelles sont les valeurs approchées du ou des antécédent(s) de -2 pour la fonction g ?

4) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Partie B **- 4,5 (+ 1) points -**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x - 2$.

1) Vérifier que $f(x) = (x+1)^2 - 3$.

2) Déterminer l'extremum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	- 5	$-\frac{9}{2}$	- 4	$-\frac{7}{2}$	- 3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$															

5) Représenter la courbe C_f sur $[-5\,;\,2]$ dans un repère orthonormé de la partie A.

6) a) Résoudre graphiquement, $f(x) < 1$.

b) Vérifier votre résultat par le calcul. (BONUS)

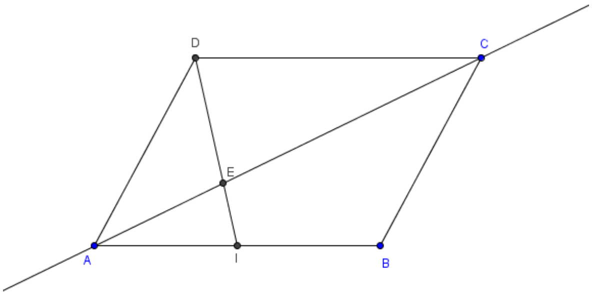
Partie C **- 1 point -** Résoudre graphiquement, $f(x) < g(x)$.

CORRECTION : DS 4 - 4 AVRIL 2019

GEOMETRIE– 7 POINTS –

Soit $ABCD$ un parallélogramme ; I le milieu de $[AB]$ et E le point tel que $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$.
Il s'agit de montrer que les points A, E et C sont alignés.

Pour commencer, complétez la figure ci-dessous (on laissera les traits de constructions) :



Première méthode - 3,5 points -

1) Exprimer $\overrightarrow{DI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}$ D'après la relation de Chasles
$\overrightarrow{DI} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AI}$
$\overrightarrow{DI} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ Car I milieu de $[AB]$

Donc $\overrightarrow{DI} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

2) Montrer que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$ d'après l'énoncé
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$ d'après la question 1
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \left(1 - \frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

Donc $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

3) Prouver que les points A, E et C sont alignés.

On sait que $ABCD$ est un parallélogramme
Donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

De plus $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

On en déduit donc que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
D'où les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
Donc les points A, E et C sont alignés

Seconde méthode - 3 points -

1) Donner les coordonnées des points A, B, C et D.

$A(0\,;\,0)$ $B(1\,;\,0)$ $C(0\,;\,1)$ et $D(-1\,;\,1)$

2) Déterminer les coordonnées des points I et E.

On sait que $A(0\,;\,0)$, $B(1\,;\,0)$
et que I milieu de $[AB]$
Alors $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ $I\left(\frac{0+1}{2};\frac{0+0}{2}\right)$

Donc $I\left(\frac{1}{2};0\right)$

On sait que $D(-1\,;\,1)$, $I(\frac{1}{2};0)$ et $E\,(x_E\,;y_E)$

Alors $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}x_I-x_D\\y_I-y_D\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-(-1)\\0-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-1\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}x_E-x_D\\y_E-y_D\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}x_E-(-1)\\y_E-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}x_E+1\\y_E-1\end{pmatrix}$

De plus $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$
Alors

- $x_E + 1 = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$ $x_E + 1 = 1$
  $x_E = 1 - 1 = 0$
- $y_E - 1 = \frac{2}{3} \times (-1)$ $y_E - 1 = -\frac{2}{3}$
  $y_E = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$

Donc $E\left(0;\frac{1}{3}\right)$

3) Conclure.

Afin de savoir si les points A, E et C sont alignés, vérifions si les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

On sait que $A(0\,;\,0)$, $C(0\,;\,1)$ et $E\left(0;\frac{1}{3}\right)$
Alors

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x_E-x_A\\y_E-y_A\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0-0\\\frac{1}{3}-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-0\\1-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Or $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
D'où les points A, E et C sont alignés

ALGEBRE - 5 POINTS -

a)

$$\frac{x+3}{x-1}+2=0$$

Valeur interdite : 1

car $x-1=0$ $x=1$

Résolution

$$\frac{x+3}{x-1}+\frac{2(x-1)}{x-1}=0$$

$$\frac{x+3}{x-1}+\frac{2x-2}{x-1}=0$$

$$\frac{x+3+2x-2}{x-1}=0$$

$$\frac{3x+1}{x-1}=0$$

$$3x+1=0$$

$$x=-\frac{1}{3}$$

Solution possible : $-\frac{1}{3}$

Bilan

VI : 1

SP : $-\frac{1}{3}$

Conclusion

$$S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

b)

$(2x-2)(2x+4)\leq 0$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$2x-2$		$-$	¦	$-$	0	$+$	
$2x+4$		$-$	0	$+$	¦	$+$	
$(2x-2)(2x+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S=[-2\ ;\ 1]$

c)

$$\frac{x+2}{2-x}\leq 3$$

Valeur interdite : 2

car $2-x=0$ $x=2$

Résolution

$$\frac{x+2}{2-x}\leq 3$$

$$\frac{x+2}{2-x}-3\leq 0$$

$$\frac{x+2}{2-x}-\frac{3(2-x)}{2-x}\leq 0$$

$$\frac{x+2}{2-x}-\frac{6-3x}{2-x}\leq 0$$

$$\frac{x+2-(6-3x)}{2-x}\leq 0$$

$$\frac{x+2-6+3x}{2-x}\leq 0$$

$$\frac{4x-4}{2-x}\leq 0$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$4x-4$		$-$	0	$-$	¦	$+$	
$2-x$		$+$	¦	$-$	0	$-$	
$\frac{4x-4}{2-x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

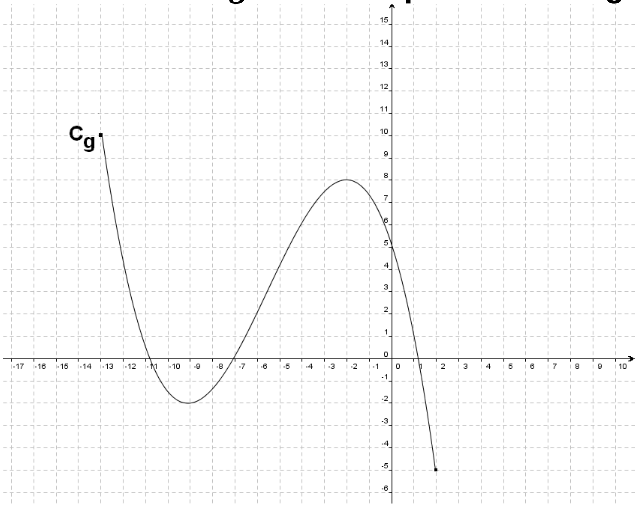
Conclusion

$$S=]-\infty\ ;1]\cup]2;+\infty[$$

FONCTION – 8 POINTS –

<u>Partie A</u> **- 2.5 points -**

Soit la fonction g dont la représentation graphique est représentée ci-dessous.



1) Quel est l'ensemble de définition de la de la fonction g ?

$Dg = [-13 \; ; \; 2]$

2) Quelle est l'image de –4 par la fonction g ?

L'image de -4 par la fonction g est 6.

3) Quelles sont les valeurs approchées du ou des de – 2 pour la fonction g ?

Les antécédents de -2 par la fonction g sont -9 et $1{,}5$.

4) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

x	-13	-9	-2	2
Variation de la fonction g	10 ↘	-2 ↗	8 ↘	-5

<u>Partie B</u> **- 4.5 + 1 points -**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x - 2$.

1) Vérifier que $f(x) = (x+1)^2 - 3$.

$(x+1)^2 - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 3 = x^2 + 2x + 1 - 3 = x^2 + 2x - 2 = f(x)$

<u>Donc</u> $f(x) = x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 - 3$

2) Déterminer l'extremum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

<u>On sait que</u> $f(x) = x^2 + 2x - 2$

<u>Alors</u> $a = 1 > 0$

$\frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2\times 1} = \frac{-2}{2} = -1$

$f(-1) = (-1)^2 + 2\times(-1) - 2 = 1 - 2 - 2 = -3$

<u>Donc</u> la fonction f admet un minimum en $x = -1$ qui vaut -3

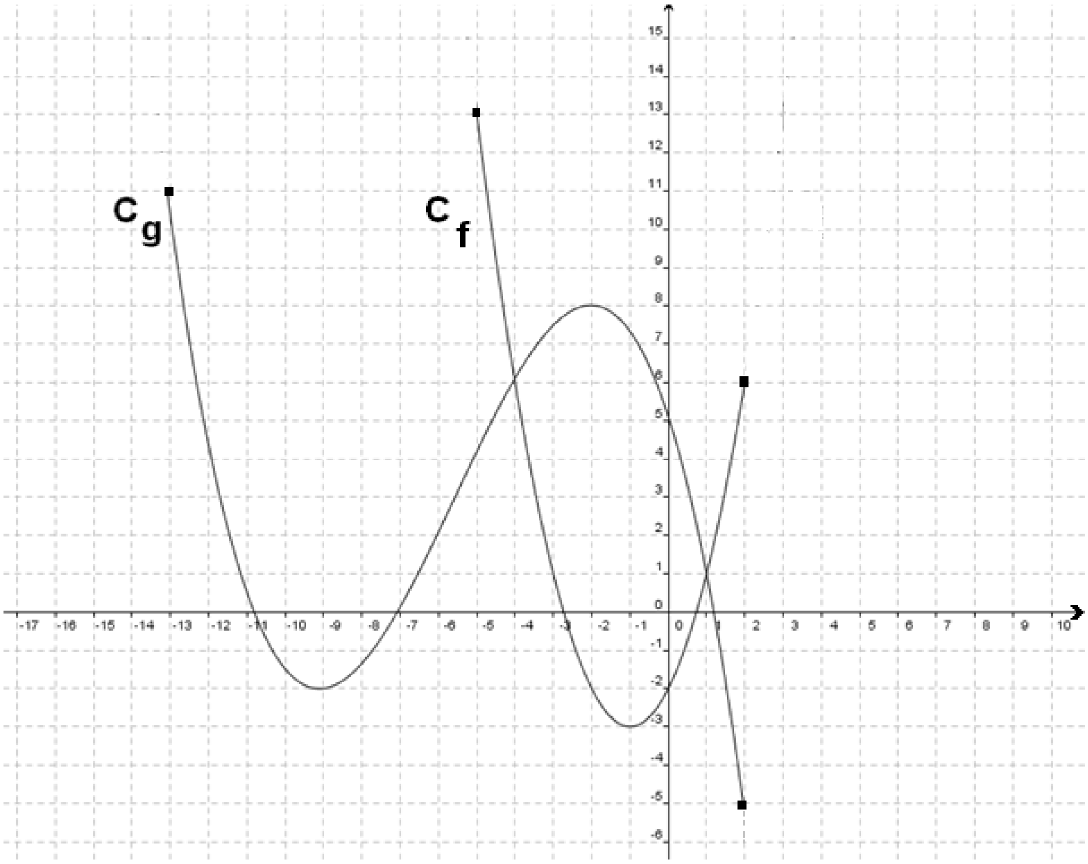
3) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Variation de la fonction f	↘	-3	↗

4) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	- 5	$-\frac{9}{2}$	- 4	$-\frac{7}{2}$	- 3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	13	9,25	6	3,25	1	$-0{,}75$	-2	$-2{,}75$	-3	$-2{,}75$	-2	$-0{,}75$	1	3,25	6

5) Représenter la courbe C_f sur $[-5\,;\,2]$ dans un repère orthonormé de la partie A.



6) a) Résoudre graphiquement, $f(x) < 1$.

Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f dont l'ordonné est strictement inférieur à 1

On trouve $S =]-3\,;\,1[$

b) Vérifier votre résultat par le calcul. (BONUS)

$f(x) < 1$

$(x+1)^2 - 3 < 1$

$(x+1)^2 - 3 - 1 < 0$

$(x+1)^2 - 4 < 0$

$[(x+1) - 2]\,[(x+1) + 2] < 0$

$(x-1)(x+3) < 0$

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$x-1$	$-$	¦	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$	¦	$+$
$(x-1)(x+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

<u>On trouve</u> $S =]-3\,;\,1[$

<u>**Partie C**</u> **- 1 point - Résoudre graphiquement, $f(x) < g(x)$.**

Les solutions sont les abscisses des points de la courbe C_f sont strictement en dessous de la courbe C_g.

<u>On trouve</u> $S =]-4\,;\,1[$